

УДК 621.391.823

DOI <https://doi.org/10.32782/tnv-tech.2026.1.1.4>

ПАРАМЕТРИЧНА АДАПТАЦІЯ СУБОПТИМАЛЬНОГО БАЙЄСІВСЬКОГО ФІЛЬТРА В УМОВАХ СТАТИСТИЧНОЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ СПОСТЕРЕЖЕНЬ

Воловик А. Ю. – доктор технічних наук, доцент,
професор кафедри інформаційних радіоелектронних технологій і систем
Вінницького національного технічного університету
ORCID ID: 0000-0002-8772-9843

Савицький А. Ю. – кандидат технічних наук, доцент,
доцент кафедри інформаційних радіоелектронних технологій і систем
Вінницького національного технічного університету
ORCID ID: 0009-0000-3490-6300

Родінков Ю. М. – аспірант кафедри інформаційних радіоелектронних
технологій і систем
Вінницького національного технічного університету
ORCID ID: 0009-0007-9033-8361

Сучасна теорія оцінювання ґрунтується на принципах використання спостережень як джерела інформації для подальшого уточнення прогнозованих даних. З моменту розробки фільтра Калмана лінійна і нелінійна оцінка стану динамічних систем у дискретному часі зі збуреними вимірами стала фундаментальним інструментом у теорії управління та обробки сигналів. У процесі практичних вимірювань досить часто виникають ситуації, коли результати спостережень містять статистичну невизначеність у вигляді додаткових шумових складових або навіть повністю зумовлені дією шуму. Коли знання статистики шуму залишаються неповними для розробника, адекватність оцінок оптимального фільтра Калмана стає сумнівною, окрім того, статистична некоректність шуму може призвести до розбіжності фільтра. Для зменшення наслідків статистичної невизначеності широко практикуються адаптивні алгоритми оцінки.

В представленій роботі основна увага зосереджена на вирішенні задачі параметричної адаптації субоптимального байєсівського фільтра здатного зберігати прийнятну точність оцінювання та керування в умовах статистичної невизначеності спостережень. Використовуючи методи адаптивної фільтрації доведено, що розглянута математична модель сенсорної підсистеми зберігає адекватність навіть за умови повної відсутності апріорних відомостей щодо ймовірності виникнення аномалій у каналі спостереження. Запропонований підхід передбачає перехід від жорстко заданого припущення до більш гнучкої моделі, у якій міра довіри до даних спостереження є результатом накопиченої інформації, що узагальнює найпоширенішу рекурсивну техніку оцінювання – дискретний фільтр Калмана. Математично доведено, що критерієм адаптивності може слугувати усереднене значення ймовірності появи аномалій у поточних спостереженнях. Відносну точність алгоритму оцінено шляхом імітаційного статистичного моделювання на основі висотної аеродинамічної моделі четвертого порядку. Отримані результати дозволили оцінити ефективність алгоритму в умовах наявності випадкових збурень та перевірити його здатність до коректного відтворення динаміки системи.

Ключові слова: субоптимальний байєсівський фільтр, параметрична адаптивна фільтрація, статистична невизначеність спостережень.

© Воловик А. Ю., Савицький А. Ю., Родінков Ю. М., 2026



Стаття поширюється на умовах
відкритої ліцензії CC BY 4.0

Volovyk A. Yu., Savytskyi A. Yu., Rodinkov Yu. M. Parametric adaptation of a suboptimal Bayesian filter under observations statistical uncertainty

The estimation theory developed to date assumes that at each moment in time, information about the signal or the system state to be estimated is contained in the observations. Since the development of the Kalman filter, linear and nonlinear dynamic systems state estimation in discrete time with disturbed measurements has become a fundamental tool in control theory and signal processing. The effectiveness of the Kalman filter depends significantly on the completeness and correctness of the prior information about the observed object dynamics and the availability of measurement results and assumes the probabilistic model's existence of disturbances and noise. In the practical measurements process, situations often arise when the observations results contain statistical uncertainty in the form of additional noise components or are even completely formed by noise. In turn, when the developer's knowledge of noise statistics remains incomplete, the optimal Kalman filter estimates adequacy becomes uncertain, moreover, the inappropriate noise statistics used sometimes lead to discrepancies in the output data. To reduce the statistical uncertainty effects adaptive estimation algorithms are widely used. This paper focuses on solving the suboptimal Bayesian filter parametric adaptation problem capable of maintaining acceptable estimation accuracy and controllability under statistical uncertainty conditions in observations. Using adaptive filtering methods, it is proven that the considered sensor subsystem mathematical model remains adequate even in the prior information complete absence of about the anomaly's probability in the observation channel. The proposed approach involves a transition from a rigidly defined assumption to a more flexible model in which the confidence degree in the observation data is the cumulative information result thus generalizing the most common recursive estimation the discrete Kalman filter technique. It has been mathematically proven that the adaptability criterion can be the anomalies occurring probability average value in current observations. To confirm the feasibility of the proposed algorithm and determine its relative accuracy, simulation statistical modeling was performed based on a fourth-order altitude aerodynamic model. The results obtained made it possible to evaluate the effectiveness of the algorithm in the presence of random disturbances and to verify its ability to correctly reproduce the dynamics of the system.

Key words: *suboptimal Bayesian filter, parametric adaptive filtering, statistical uncertainty of observations.*

Постановка проблеми. Розроблена на сьогоднішній день теорія оцінювання припускає, що в будь-який момент часу, інформація про сигнал або стан, що підлягає оцінюванню, міститься в спостереженнях. Лінійна та нелінійна оцінка стану з використанням дискретних часових моделей зі збуреними вимірюваннями широко використовується з моменту впровадження фільтра Калмана (ФК) [1]. Однак, ефективне використання ФК передбачає: повного і коректного апріорного опису динаміки об'єкту спостереження, а саме кінематичної моделі; моделі каналу спостереження, яка визначає зв'язок між параметрами динамічної моделі та доступними результатами вимірювань, повних або часткових компонент вектору стану об'єкта спостережень; імовірнісної моделі збурень і завад, що являються джерелами невизначеності та механізму їх взаємодії з інформативними параметрами; прийнятого критерію оптимальності в ракурсі поставленої задачі. Тому якість роботи ФК буде значною мірою залежати від того наскільки вище наведені ствердження відповідають умовам дійсності.

У процесі проведення експериментальних досліджень та практичних вимірювань досить часто виникають ситуації коли результати спостережень містять у собі додаткові шумові компоненти або навіть повністю формуються за рахунок шуму. Подібні явища можуть бути зумовлені наприклад дією на систему спостереження індустриальних завад, факторів несприятливого навколишнього середовища або завад штучного походження [2]. У таких умовах проведення оцінки параметрів сигналу значно ускладнюється, оскільки статистичні характеристики шуму, як правило, невідомі або можуть бути встановлені лише частково. В свою чергу, коли знання статистики шуму залишаються неповними для розробника, адекватність оцінок фільтра Калмана стає сумнівною, більш того, використання невідповідної

статистики шуму може призвести не тільки до неприйнятної ефективності оцінювання, а навіть до розбіжності фільтра [3].

Для зменшення наслідків статистичної невизначеності широко практикують адаптивні алгоритми оцінювання невідомих параметрів. В адаптаційному процесі ключовою проблемою є рішення задачі «фактору адаптації», з метою компенсації впливу збурень кінематичної моделі та спостережень на оцінки вектору стану. Не менш важливим питанням залишається визначення адекватної статистики навчання, що до виявлення нев'язок у сенсі узгодження апріорних і апостеріорних статистичних властивостей збурень. В представленій роботі основна увага зосереджена на вирішенні задачі адаптації параметрів модифікованого ФК здатного зберігати прийнятну точність оцінювання та керованість в умовах статистичної невизначеності саме спостережень, оскільки, як було показано в [2] вектор стану об'єкту спостереження, у вище визначених умовах, не може бути оцінений безпосередньо методами звичайної Калманівської фільтрації.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Адаптивна фільтрація на основі алгоритмів Калмана має численні застосування в багатьох галузевих дослідженнях, від класичної сфери для відстеження рухомих об'єктів в навігаційних, радіолокаційних, мультисенсорних системах та комплексах [4], оцінки положення космічних аеродинамічних об'єктів або супутників [5, 6] до новітніх підходів на основі сучасних інтелектуальних технологій в робототехніці [7, 8], в складних кіберсистемах на основі машинного навчання [9], в задачах відмовостікого стеження на основі нейронних мереж [10], в системах інтеграції сонячної фотоелектричної енергії [11], в гідрології для скорочення і корекції гідромоделей на основі асиміляції даних [12] і навіть у прогнозуванні погоди [13].

Більша частина існуючих досліджень в цій області зосереджена на пошуку відповідних коваріаційних матриць шуму процесу і шуму спостережень для певної, заданої динамічної моделі. Різноманіття методів оцінки та адаптації коваріацій шуму охоплюють широкий спектр підходів, від теоретично обґрунтованих байєсівських [14] і методів максимальної правдоподібності [15, 16] до інноваційних обчислювальних коваріаційних [17, 18] і кореляційних алгоритмів [19, 20], а також гібридних і нейромережових рішень. Узагальнюючи проведений аналіз, можна відзначити, що розглянуті методи характеризуються низкою спільних рис, вони мають глобальну спрямованість та переважно теоретичну орієнтацію [18], відзначаються високою обчислювальною складністю [14], їм притаманна недостатня стійкість до непередбачених збурень, що негативно впливає на надійність функціонування в реальних експлуатаційних умовах [19, 20]. Нарешті, зазначені методи не можуть бути ефективно реалізовані в системах реального часу, особливо за використання «Fixed Point» процесорів, що накладає суттєві обмеження на їх практичну придатність [15, 16].

Виклад основного матеріалу. В представленій роботі розгляданню підлягає більш вузьке коло задач практичного спрямування, а саме випадки коли оптимальний оцінювач не завжди може отримати доступ до істинних (в межах закладених у моделі) даних сенсорної системи спостереження. Фактичними причинами такого становища можуть бути явища які досить часто зустрічаються у реальному середовищі експлуатації тих чи інших пристроїв оцінювання: поява неполадок у радіовимірювальному тракті радіолокаційної або навігаційної системи [21], помилкові вимірювання, що формуються внаслідок внутрішньо-променевих відбиттів та інтерференційних явищ, спотворення результатів спостереження у наслідок впливу імпульсних завад великої потужності [22], мінливі збоїв в лічильних

цифрових пристроях, раптового мерехтіння систем синхронізації, перевантаженості мережевих дротових або бездротових систем передачі даних [23], наслідки навмисних атак в масштабних розподілених кіберсистемах або застосування засобів РЕБ при частковому пригніченні і ін.

Використовуючи байєсівський підхід та методи адаптаційної фільтрації, в проведеному дослідженні, шляхом формування апостеріорної щільності ймовірності невідомого параметру, узагальнено найпоширенішу рекурсивну техніку оцінки – дискретний фільтр Калмана на випадок відсутності або неповноти відповідних апріорних даних.

Припустимо, що оцінюваний стан \mathbf{x}_k розміру n контролюється послідовністю системних шумів \mathbf{w}_k у момент часу t_k , а вектор спостережень \mathbf{y}_k розміру m має шумове забарвлення ξ_k . У випадку стохастичної задачі рівняння стану такої динамічної системи, в моделі простору станів, має вигляд:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{w}_k \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \xi_k \quad (2)$$

додатково потребують роз'яснення: \mathbf{A}_k – системна перехідна матриця, структура якої залежить від характеру динаміки об'єкта стеження у просторі розміром $n \times n$; \mathbf{B}_k – системна матриця збурень розмірністю $n \times q$; \mathbf{w}_k , ξ_k – вектори збурень динаміки та спостережень, розмірами q та m відповідно, що задані у вигляді гаусівських білих послідовностей з нульовим середнім значенням та апріорно заданими кореляційними матрицями \mathbf{Q}_k ($q \times q$) та \mathbf{R}_k ($m \times m$); \mathbf{C}_k – матриця спостережень ($m \times n$), структура якої визначається типом та кількістю сенсорів спостереження.

В стандартній моделі (2) не закладено механізму відтворення спостережень у випадку присутності аномальних вимірювань. Представимо уточнене рівняння спостереження за даними об'єкту контролю у вигляді:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \xi_k + n_k \theta_k \quad (3)$$

Відмінність від моделі (2) полягає у присутності двох додаткових складових: n_k – змінна у вигляді звичайної Марківської послідовності, що приймає бінарні значення $n_k \in [0, 1]$ і описує присутність збурень результатів спостереження викликаних вище згаданими, аномальними явищами; θ_k – некорельована випадкова послідовність, в загальному випадку, з кінцевою кількістю станів g_i , $i=1, \dots, N$, що характеризує розмах (“peak factor”) аномальних впливів. Формулювання моделі спостережень у вигляді (3) забезпечує більш адекватний математичне опис процесу спостереження в реальних умовах функціонування системи, з'являється можливість одночасного статистичного оцінювання як параметрів досліджуваної системи, так і стану каналу спостережень.

Оптимальний пристрій відновлення, у багатовимірних системах постійно підтримує баланс відношення $n[\mathbf{Q}_k]/n[\mathbf{R}_k]$, тим самим реалізується компроміс між темпом відновлення та робастністю щодо шумів у даних спостережень. Враховуючи постановку нашої задачі, цей баланс будемо змінювати за рахунок \mathbf{R}_k наприклад, за правилом $\mathbf{R}_k = \mathbf{R}_k^0 + \Delta \mathbf{R} = \mathbf{R}_k^0 [1 + \rho_k \mathbf{M}]$, де \mathbf{R}_k^0 – номінальне значення коваріаційної матриці шумів спостережень і визначає потенційну точність сенсорної підсистеми; ρ – параметр невизначеності стану каналу спостережень, що може змінюватись у інтервалі $\underline{\rho} \leq \rho \leq \bar{\rho}$; \mathbf{M} – симетрична позитивно визначена матриця сталого типу, яка характеризує масштаб модифікацій коваріаційної матриці \mathbf{R}_k . Така постава дозволяє формалізувати опис сенсорної підсистеми, що характеризується мультиплікативними аномальними збуреннями за допомогою інтервального сімейства матриць \mathbf{R}_k^i [24]. Наближені до практики ситуації, подібні на веденим

вище, розглядалися і в інших роботах [23, 25], але умовою дослідження було переривчатість або повна втрата спостережень. В нашому випадку модель (3) є більш місткою і з методологічної точки зору розширює простір для застосування адаптивних і робастних алгоритмів оцінювання, здатних коректно інтерпретувати неоднорідні дані і мінімізувати вплив аномальних вибірок.

Оскільки метою дослідження є компенсація впливу аномальних спостережень на результуючу точність, то добавку \mathbf{R}_k можна спростити і урахувати у вигляді адитивної складової в номінальній математичній моделі каналу спостережень (3), при цьому $\mathbf{M}=\mathbf{I}$. Розглянуте припущення можна реалізовувати в рамках байєсового підходу або з залученням принципів адаптивної фільтрації. Застосування байєсівської методології розглянуто в роботі [2], де результатом синтезу є сукупність модельно-умовних фільтрів Калмана, відповідно налаштованих на кожному з прийнятих до розгляду гіпотез \mathbf{H}_k^i . Для спрощення математичних розрахунків, відповідно до результатів [2], розглянемо випадок коли θ_k^i може приймати граничні значення $i \in [1, \sigma]$, ($\sigma \gg 1$) з апіорно заданими ймовірностями p_1^i та p_σ^i . При θ_k^i , що відповідає номінальним умовам роботи системи спостереження, коваріаційна матриця шумів вимірювань \mathbf{R}_k визначається закладеними у модель похибками первинних вимірювань, а поява раптових аномалій буде враховуватися зростанням шумів до величини $\sigma^2 \mathbf{R}_k$. Баєсівська оптимальна оцінка найменшого ризику $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$ для багатокрокового випадку, за умови, що вектор спостережень $\mathbf{y}_k^m = \{y_1, \dots, y_k\}$ залежить від m -конкретної реалізації послідовності $\theta_k = \{\theta_1, \dots, \theta_k\}$ являє собою апостеріорне середнє

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = E\{\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{y}_k^m\} = \int \mathbf{x}_{k+1} f[\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{y}_k^m] d\mathbf{x}_k \quad (4)$$

де апостеріорна густина розподілу ймовірностей $f[\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{y}_k^m]$ може бути апроксимована зваженою сумою 2^k гаусівських густин розподілу. Тоді апостеріорне середнє являє собою

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \sum_{r=1}^{\sigma} \dots \sum_{r=1}^{\sigma} \int \left\{ \mathbf{x}_{k+1} f[\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{y}_k^m, \theta_k^i] d\mathbf{x}_{k+1} \right\} p(\mathbf{y}_k^m, \theta_k^i) \quad (5)$$

Для практичних обчислень оцінка (5) малоприматна, так як зі збільшенням часового інтервалу спостереження об'єм даних зростає зі швидкістю 2^k . Рішенням є субоптимальна, псевдобайєсівська оцінка, яка може бути обчислена рекурентно на основі співвідношення

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \sum_{r=1}^{\sigma} \mathbf{x}_{k+1} f[\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{y}_k^m, \theta_k^i] p(\theta_k^i | \mathbf{y}_k^m) \quad (6)$$

де для реалізації (5) число параметричних гілок має бути обмежено при отриманні чергового спостереження шляхом усереднення θ_{k-1} на тактові $(k-1)$, а густина $f[\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{k-1}^m]$ – представлена у вигляді гаусівського розподілу з параметрами $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}$, що відтворює еквівалентні статистичні властивості. За зазначених умов, у роботі [2] було синтезовано пристрій оптимальної фільтрації на фоні аномальних збурень у каналі спостереження. Він забезпечує формування поточної оцінки у вигляді зваженої суми модельно-обумовлених оцінок окремих фільтрів Калмана, узгоджених із двома альтернативними гіпотезами $H_{(\theta k=1)}$ і $H_{(\theta k=\sigma)}$.

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \sum_{r=1}^{\sigma} \mathbf{x}_k^r \cdot p(\theta_k^r | \mathbf{y}_k^m), \text{ де } p[\theta_k^r | \mathbf{y}_k^m] = \frac{\rho[\theta_k^r | \mathbf{y}_{k-1}^m] f[\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{k-1}^m, \theta_k^r]}{\sum_{r=1}^{\sigma} \rho[\theta_k^r | \mathbf{y}_{k-1}^m] f[\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{k-1}^m, \theta_k^r]} \quad (7)$$

Обов'язковою умовою є $\sum_{r=1}^{\sigma} p[\theta_k^r | \mathbf{y}_k^m] = 1$, що передбачає доступність відповідних апіорних статистик. Кореляційна матриця похибок оцінювання

$\mathbf{P}_k^\Sigma = \sum_{i=1}^{\sigma} \left\{ \mathbf{P}_k^i + [\hat{\mathbf{x}}_k^i - \hat{\mathbf{x}}_k] [\hat{\mathbf{x}}_k^i - \hat{\mathbf{x}}_k]^T \right\} \cdot p[\mathbf{0}_k^i | \mathbf{y}_k^m]$ через обчислення апостеріорних ймовірностей $p(\cdot | \mathbf{y}_k^m)$, залежить від результатів поточних вимірювань \mathbf{y}_k , що протирічить умовам лінійності [2, 23].

Використовуючи у якості базового алгоритму субоптимальний байєсівський фільтр [2], відповідно до мети роботи доведемо, що запропонована математична модель (3) зберігає адекватність навіть за відсутності повноти апріорних відомостей щодо ймовірності виникнення аномалій у каналі спостереження. Для цього, залишивши припущення, що θ_k має властивість «білої» випадкової послідовності, покладемо ймовірність p_i^j невідомою для спостерігача константою, тобто модель працює з прихованим параметром, який не змінюється в часі, але його значення потрібно ініціалізувати і оцінити на основі спостережуваних даних. Ініціалізацію початкових даних проведемо за типової умови – рівномірна розподіленість на інтервалі [0, 1]. Поточну оцінку доцільно формувати у вигляді зваженої суми (6), однак алгоритм її побудови зазнає уточнення, замість апріорно фіксованого параметра використаємо середнє значення відповідної ймовірності. Такий підхід передбачає перехід від жорстко заданого припущення до більш гнучкої, адаптивної моделі, у якій міра довіри до даних спостереження є результатом накопиченої інформації.

Представимо апостеріорну ймовірність (7) у вигляді умовного середнього значення за умови відсутності аномальних впливів на результати спостереження

$$p[\cdot | \mathbf{y}_k^m] = \int_0^1 f[\cdot | p_i, \mathbf{y}_k^m] dp_i = \int_0^1 f[p_i | \mathbf{y}_k^m] \rho[\cdot | p_i, \mathbf{y}_k^m, p_i] dp_i. \quad (8)$$

Застосування правила Байєса до співмножника $f[p_i | \mathbf{y}_k^m]$ наведеного виразу дозволяє записати:

$$f[p_i | \mathbf{y}_k^m] = \frac{f[p_i | \mathbf{y}_{k-1}^m] f[\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{k-1}^m, p_i]}{f[\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{k-1}^m]}, \quad (9)$$

де $f[p_i | \mathbf{y}_{k-1}^m]$ – апостеріорний розподіл ймовірностей величини p_i , отриманий у попередньому циклі розрахунків при використанні початкової умови $f[p_i | \mathbf{y}_0^m] = 1$.

Другий співмножник (8) при фіксованому значенні p_i може бути записаним у формі

$$\rho[\cdot | \mathbf{y}_k^m] = \frac{p_i f[\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{k-1}^m, \cdot, p_i]}{p_i f[\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{k-1}^m, \cdot, p_i] + (1 - p_i) f[\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{k-1}^m, \cdot, p_i]}, \quad (10)$$

З огляду на те, що значення \mathbf{y}_k не має прямої функціональної залежності від величини p_i , апостеріорна густина розподілу ймовірностей для цього параметра залишається незмінною відносно поточного вимірювання $f[\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{k-1}^m, \cdot, p_i] = f[\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{k-1}^m, \cdot]$.

Просте поєднання розглянутих виразів (8–10) у найпростішій формі дає наступний результат

$$\rho[\cdot | \mathbf{y}_k^m] = \frac{f[\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{k-1}^m, \cdot]}{f[\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{k-1}^m]} \int_0^1 p_i f[p_i | \mathbf{y}_{k-1}^m] dp_i, \quad (11)$$

за умови, що $f[\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{k-1}^m, p_i] = p_i f[\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{k-1}^m, \cdot, p_i] + (1 - p_i) f[\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{k-1}^m, \cdot, p_i]$.

Двократне застосування операції усереднення за параметрами p_i та θ_k до густини розподілу ймовірностей $f[\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{k-1}^m]$ дозволяє подати її у вигляді

$$\begin{aligned} f[\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{k-1}^m] &= \int_0^1 f[p_i, \mathbf{y}_k^m | \mathbf{y}_{k-1}^m] dp_i = \int_0^1 f[p_i, \mathbf{y}_k^m] f[\mathbf{y}_k^m | \mathbf{y}_{k-1}^m, p_i] = \\ &= \int_0^1 \{ p_i f[\mathbf{y}_k^m | \mathbf{y}_{k-1}^m, \cdot, p_i] + (1 - p_i) f[\mathbf{y}_k^m | \mathbf{y}_{k-1}^m, \cdot, p_i] \} f[p_i, \mathbf{y}_k^m] dp_i = \\ &= \sum_{i=1}^{\sigma} \bar{p}_k^i f[\mathbf{y}_k^m | \mathbf{y}_{k-1}^m, \cdot, p_i], i=1, \sigma \end{aligned} \quad (12)$$

Якщо врахувати, що $\bar{p}_k^i = \int_0^1 p_1 f[p_1 | \mathbf{y}_{k-1}^m] dp_1$, $\bar{p}_k^\sigma = 1 - \bar{p}_k^i$, то

$$\rho[\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_k^m] = \frac{\bar{p}_k^i f[\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{k-1}^m, \mathbf{y}_k^i]}{\sum_{i=1}^{\sigma} \bar{p}_k^i f[\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{k-1}^m, \mathbf{y}_k^i]} \quad (13)$$

де, \bar{p}_k^i – адаптаційний параметр, усереднене значення апіорної ймовірності p_1 , що підлягає обчисленню за наступною формулою

$$\bar{p}_k^i = \int_0^1 p_1 \frac{f[p_1 | \mathbf{y}_{k-1}^m] f[\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{k-1}^m, p_1]}{f[\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{k-1}^m]} dp_1. \quad (14)$$

Це дає можливість рекурентно обчислювати апостеріорну ймовірність $\rho[p_i | \mathbf{y}_{k+1}]$ у наступний спосіб

$$\rho[p_i | \mathbf{y}_{k+1}] = \frac{\{p_i f[\mathbf{y}_{k+1} | \mathbf{y}_{k+1}^i] + (1-p_i) f[\mathbf{y}_{k+1} | \mathbf{y}_{k+1}^\sigma]\} \rho[p_i | \mathbf{y}_k]}{\bar{p}_k^i f[\mathbf{y}_{k+1} | \mathbf{y}_{k+1}^i] + (1-\bar{p}_k^i) f[\mathbf{y}_{k+1} | \mathbf{y}_{k+1}^\sigma]}. \quad (15)$$

Порівняльний аналіз ефективності. Беручи до уваги нелінійний характер синтезованого алгоритму, а також стохастичну природу взаємодіючих інформаційних потоків у методологічну основу дослідження ефективності процедур фільтрації було покладено метод статистичного моделювання. Ефективність роботи адаптивного фільтра (AF) оцінювалася шляхом порівняння статистичних характеристик його точності з характеристиками еталонного фільтра Калмана (FK), а також із параметрами нелінійного фільтра (PBF), синтезованого у [2]. До розгляду були включені наступні сценарії: відсутність аномальних збурень у результатах спостережень; поява аномальних спостережень із наперед заданими статистичними параметрами; випадок аномальних збурень зі статистичною невизначеністю. Це забезпечило комплексне зіставлення результатів та дозволило обґрунтувати переваги запропонованих процедур фільтрації.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} h \\ v_h \\ \dot{v}_h \\ \ddot{v}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & T1 & T2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ v_h \\ \dot{v}_h \\ \ddot{v}_h \end{bmatrix} (t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xi(t);$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} h \\ v_h \\ \dot{v}_h \\ \ddot{v}_h \end{bmatrix} (t) + \theta_n \xi(t)$$

Статистичне моделювання виконувалося на основі висотної моделі аеродинамічного об'єкта, що формалізується динамічною системою четвертого порядку.

Моделі зазначеного типу характерні для широкого класу об'єктів спостереження, серед яких: повітряні судна на етапі планування, багаторазові безпілотні апарати літакового типу під час заходу на посадку, динаміка руху метеорологічних зондів, а також аеродинамічні об'єкти військового призначення. Більш загальний опис моделей такого класу подано у [24]. Зважаючи на те, що приклад носить виключно ілюстративний характер та використовується передусім для перевірки адекватності розробленого адаптивного алгоритму фільтрації деталізована прив'язка до конкретного об'єкта спостереження не передбачалася. Константи T1

та T2 є узагальненими параметрами, що характеризують аеродинамічні властивості об'єкта спостереження та визначаються відповідними числовими значеннями -1.1772, -1.0850. Параметром оцінювання виступає інформаційна компонента вектору стану h , що формується, наприклад, даними барометричного сенсора висоти, радіовисотоміра, даними супутників (GNSS) або їх комбінацією. Еквівалентний запис (15) для дискретного часу:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{Q}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \theta_k \mathbf{R}_k \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \cdot 10^{-2} & 4 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 1 & 3 \cdot 10^{-2} & 4 \cdot 10^{-4} \\ 0 & 0 & 9.9 \cdot 10^{-1} & 2.9 \cdot 10^{-2} \\ 0 & 0 & -3.47 \cdot 10^{-2} & 9.7 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}_k = \text{diag}[10^{-5} \quad 1 \cdot 10^{-8} \quad 5 \cdot 10^{-8} \quad 3 \cdot 10^{-9}]$$

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]; \quad \mathbf{R}_k = 1.4 \cdot 10^{-3};$$

$$\Delta T = 0.024 \text{ c}; \quad k = 1 \dots N, \quad N = 800.$$

Змінна θ_k виконує роль стохастичного маркера, який дозволяє враховувати можливість появи аномальних збурень у процесі моделювання. У випадку їх присутності θ_k приймає значення σ з апіорно заданою ймовірністю $p^i_\sigma = 0.3$, остання, являє собою невідомий параметр для варіанта аномальних збурень зі статистичною невизначеністю. Початковий стан моделі було ініціалізовано відповідно до наступних умов:

$$\mathbf{x}_{00} = [1.0 \quad -0.375 \quad 0.375 \quad -0.001]^T \text{— модель динаміки};$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{00} = [0.8 \quad -0.5 \quad 0.5 \quad -0.015]^T \text{— початкові оцінки досліджуваних фільтрів};$$

$$\mathbf{P}_{00} = \text{diag}[0.1 \quad 0.01 \quad 0.001 \quad 1 \cdot 10^{-4}] \text{— апіорна коваріація}.$$

Одна з можливих реалізацій потоку даних висоти за умов присутності аномальних збурень, статистичні характеристики яких вважаються не визначеними, показана на рис. 1а, результати фільтрації, отримані відповідними алгоритмами, ілюструються рис. 1б.

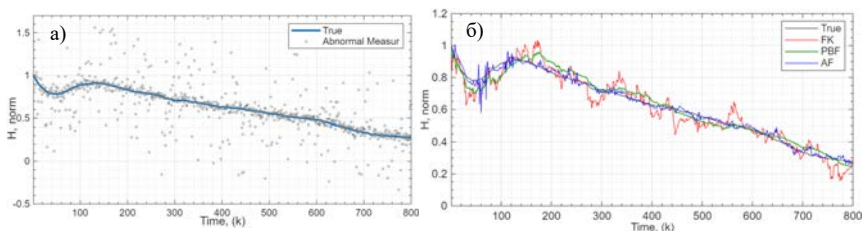


Рис. 1. Результати фільтрації потоку даних на фоні аномальних збурень

Порівняння точності оцінювання виконувалося на основі статистичного аналізу залишку, що був утворений різницею між еталонною траєкторією висоти та її оцінками сформованими із використанням відповідних фільтрів. За ідеальних умов сформована нев'язка має нульове значення. Оскільки різницевий сигнал інтегрально відображає узгодженість між результатами фільтрації та еталонними вимірюваннями, то на практиці її відмінність від нуля можливо використати як критерій для оцінки відносної точності досліджуваних алгоритмів, а статистичні характеристики залишку дозволяють кількісно оцінити ефективність роботи фільтра та визначити рівень стійкості алгоритму до стохастичних збурень. Для забезпечення об'єктивності порівняння методів фільтрації різницеві залишки каналу висоти \mathbf{x}_{11} (рис. 2а.) піддавалися усередненню на 50-ти реалізаціях при фіксованій

маркерній послідовності θ_k на всьому інтервалі обчислювального експерименту. Результати їх статистичного аналізу наведені на рис. 2б.

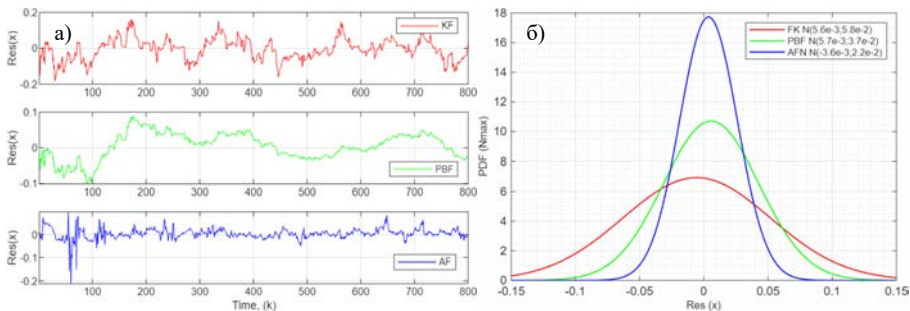


Рис. 2. Якісні показники процесу фільтрації на фоні збурень зі статистичною невизначеністю: різниці сигнали (а) та їх описова статистика (б)

У випадку адаптивного фільтра, безперервна величина апостеріорної густини розподілу $\rho\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ s, k \end{smallmatrix} | \mathbf{y}_k^m \right]$ апроксимувалася на інтервалі $[0, 1]$ рівномірною дискретною сіткою з кількістю відділків $N=50$ та подальшим перерахуванням її дискретного значення на кожному такті обчислень за формулою (16). Процес адаптації даного параметра на інтервалі спостереження зображено на рис. 3.

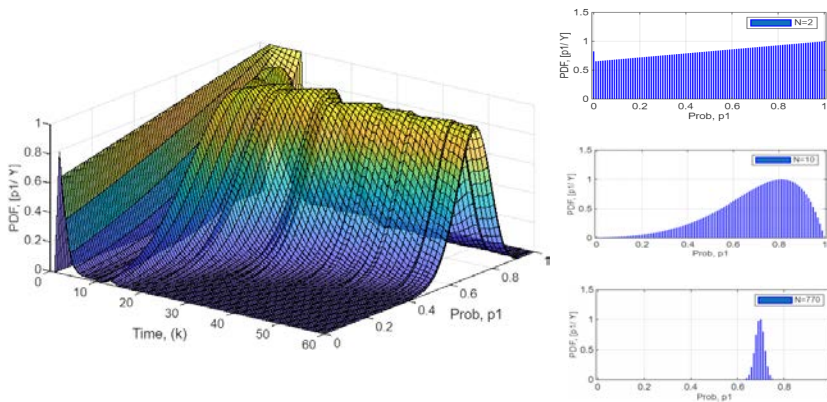


Рис. 3. Процес адаптації апостеріорної густини розподілу $\rho\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ s, k \end{smallmatrix} | \mathbf{y}_k^m \right]$

Адаптивний параметр, середнє значення ймовірності появи аномалій у поточних спостереженнях P_k^i , на основі якого відбувається корекція апостеріорної ймовірності (15), обчислювався відповідно до рівняння (14). Приклад типової реалізації ймовірності P_k^i на фоні апостеріорної ймовірності p_{σ}^i , початково невідомої для фільтра, представлено на рис. 4. Процес усунення параметричної невизначеності відбувається на інтервалі перших ста тактів рекурентних обчислень. Після етапу самонавчання, по мірі подальшого уточнення статистики аномальних збурень, спостерігається динаміка поступової збіжності до істинного значення $p_{\sigma}^i = 0.3$, що є характерною рисою типових адаптивних алгоритмів.

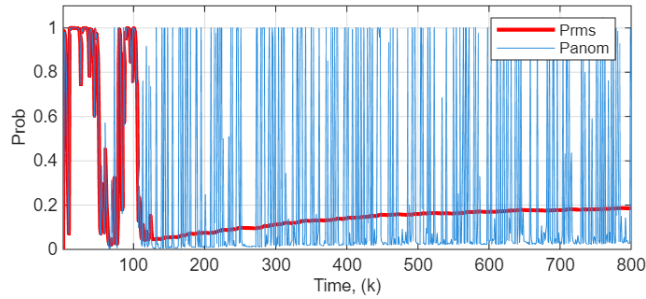


Рис. 4. Корегування у часі середнього значення апостеріорної імовірності \bar{P}_k^{σ}

Підсумкові результати порівняння відносної точності оцінювання розглянутих алгоритмів для даного та вище згаданих сценаріїв, у межах статистичних властивостей відповідних різницевого залишків, подано в таб. 1.

Таблиця 1

Результати статистичного аналізу залишків різницевого сигналу

Алгоритм фільтрації	Базовий режим		Наявність аномальних збурень ($p_{\sigma}^i = 0.3$)		Наявність статистично не визначених аномальних збурень	
	$M(x)$	$Var(x)$	$M(x)$	$Var(x)$	$M(x)$	$Var(x)$
FK	$4.1491 \cdot 10^{-4}$	$9.7686 \cdot 10^{-3}$	$-5.595 \cdot 10^{-3}$	$5.7572 \cdot 10^{-2}$	$5.5955 \cdot 10^{-3}$	$5.7572 \cdot 10^{-2}$
PBF	$2.9787 \cdot 10^{-3}$	$1.7646 \cdot 10^{-2}$	$3.0807 \cdot 10^{-3}$	$1.1614 \cdot 10^{-2}$	$5.5701 \cdot 10^{-3}$	$3.7277 \cdot 10^{-2}$
AF	$1.6712 \cdot 10^{-3}$	$1.2577 \cdot 10^{-2}$	$3.6309 \cdot 10^{-3}$	$2.2496 \cdot 10^{-2}$	$3.63097 \cdot 10^{-3}$	$2.2449 \cdot 10^{-2}$

Базовий, нормальний режим роботи підсистеми спостереження, відповідно до (2), передбачав відсутність впливу аномальних збурень, при цьому до параметрів субоптимального байєсівського фільтра заздалегідь була в внесена апріорна ймовірність $p_{\sigma} = 0.3$. Вочевидь, що у зазначених умовах стандартний фільтр Калмана забезпечив найкращі результати оцінювання, перевищуючи майже у півтора рази результати точності PBF та AF. Зауважимо, що алгоритмічно базовим елементом PBF та AF є той самий стандартний FK в подальшому доповнений механізмом визначення належної апостеріорної ймовірності і механізмом утворення підсумкових оцінок шляхом ймовірнісного зважування. Не зважаючи на їх обчислювальну схожість в PBF наявно проявляється апріорна параметрична не узгодженість в той час, як в AF подовжує працювати механізм адаптації, що підтверджується майже на 40% виграшем у точності відносно PBF. Ситуація кардинально змінюється у другому сценарію, де в спостереженнях (3) є присутніми стохастичні аномалії задекларовані ймовірністю їх появи на рівні $p_{\sigma}^i = 0.3$, що співпадає з параметрами ініціалізації субоптимального байєсівського фільтра, при цьому параметри інших фільтрів залишалися без змін. Тепер, коли статистика збурень не відповідає моделі закладеній у стандартному FK, останній майже у п'ять разів програє у точності спеціально створеному для подібних умов PBF з роботи [2] і у 2,5 рази представлено в даній роботі адаптивному алгоритму. Потенційно, в умовах усталеного

режиму, адаптивний фільтр за характеристиками точності збігається до субоптимального PBF, що генерує псевдобайєсові оцінки.

За найгірших умов – статистичної невизначеності аномальних збурень (рис. 1–5), точність запропонованого адаптивного субоптимального байєсівського фільтра на 60% перевищує аналогічний показник, знову параметрично не узгодженого, субоптимального PBF і майже у 2,5 рази еталонний FK. Для більшої наочності ініціалізація параметру p_{σ}^i в алгоритмі PBF виконувалась випадковим чином у кожній реалізації на інтервалі $\{0,01\dots 0,99\}$, у той час як інші критерії відносно сценарію 2 залишалися незмінними.

Висновки. У представленому дослідженні, для сценаріїв з статистично невизначеними аномальними збуреннями у сенсорній підсистемі, на основі субоптимального байєсівського алгоритму, синтезовано адаптивний фільтр чинником самонавчання якого є апроксимоване значення відповідної ймовірності отримане методом усереднення спорідненої апостеріорної умовної густини розподілу.

Доведено, що математична модель (3) залишається функціональною навіть у разі припущення відсутності повної апріорної інформації про ймовірність аномальних спотворень. Зазначений результат досягається завдяки одночасному оцінюванню як параметрів інформативного процесу, так і статистичних характеристик аномальних відхилень у доступних вимірюваннях.

Результати моделювання продемонстрували перевагу запропонованого алгоритму AF у порівнянні з іншими розглянутими алгоритмами фільтрації для сценарію з статистичною невизначеністю аномальних збурень. Проте, платою за універсальність схеми адаптивної фільтрації є суттєве зростання додаткових обчислень в розрахунках апостеріорної ймовірності $p[\theta_k^i | y_k^m]$, збільшення обсягу пам'яті для зберігання неперервної густини розподілу ймовірностей $f[p_i | y_{k+1}]$ у процесі рекуррентних обчислень, часова затримка виконання пов'язаного з адаптаційним чинником, загальне укладення алгоритму порівняно з стандартним FK. Не зважаючи на це, більш затратний у обчислювальному плані АФ може виконувати роль універсального оцінюючого фільтра в умовах статистичної невизначеності збурень, що є більш наближеною ситуацією для практичних застосувань.

З торчки зору теорії, ідея запропонованого АФ може бути розширена для розробки нелінійного фільтра для стохастичної нелінійної системи з невідомою ймовірністю аномальних збурень у вимірюваннях.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ:

1. Kalman R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *J. Basic Eng.* 1960. vol. 82, no. 1. P. 35–45.
2. Воловик А. Ю., Кичак В. М., Савицький А. Ю., Макогон В. І. Оцінювання даних в телеметричному каналі враженому хаотично-імпульсними переш-кодами. *Системи та технології. «Технічні науки», Дніпро.* 2025. № 1 (69). С. 259-268. DOI: <https://doi.org/10.32782/2521-6643-2025-1-69.31>
3. You K., Fu M., Xie L. Mean square stability for Kalman filtering with Markovian packet losses. *Automatica.* 2011. vol. 47, Iss. 12. P. 2647–2657. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2011.09.015>
4. Li D., Ge X., Lu J. Multi-sensor fusion positioning method based on adaptive ESKF. *4th International Conference on Electronic Information Technology (EIT).* 2025. P. 300-304, DOI: 10.1109/EIT67313.2025.11232444.
5. Nemati M., Kankashvar M., Bolandi H. Unscented Kalman Filter adaptive noise covariance selection for satellite formation flying with Q_leaning. *30th International Conference on Electrical Engineering (ICEE).* 2022. P. 362-367, DOI: 10.1109/ICEE55646.2022.9827301.

6. Fraser C., Ulrich S. A Fuzzy Adaptive Kalman Filter for Spacecraft Formation Navigation. *American Control Conference (ACC)*. 2019. P. 2527-2533, DOI: 10.23919/ACC.2019.8814948.
 7. Chen S. Y. Kalman Filter for Robot Vision: A Survey. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 2012. vol. 59, Iss. 11. P. 4409-4420, DOI:10.1109/TIE.2011.2162714.
 8. Yuzhen P., Quande Y., Benfa Z. The application of adaptive extended Kalman filter in mobile robot localization. *Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*. 2016. P. 5337-5342. DOI: 10.1109/CCDC.2016.7531952.
 9. Anderson B., Hossain G. Enhancing Kalman Filter Resilience in Electric Vehicles: Cyber-Attack Mitigation with Machine Learning Based Adaptive Filtering. *13th International Symposium on Digital Forensics and Security (ISDFS)*. 2025. P. 1-6, DOI: 10.1109/ISDFS65363.2025.11011918.
 10. Zhang L., Tian D., Sun S. Robust Adaptive Cubature Kalman Filter Based Neural Network Fault Tolerance Control. *IEEE Sensors Journal*. 2025. P(99) 1-1. DOI:10.1109/JSEN.2025.3626546.
 11. Jumantoro E., Pribadi A., Verayiah R., Prasetyo D. Kalman Filter-Based Adaptive Load Shedding for Solar Photovoltaic Integration in Indonesia's Isolated Grid. *International Conference on Technology and Policy in Energy and Electric Power (ICT-PEP)*. 2025. P. 282-287. DOI: 10.1109/ICT-PEP67281.2025.11232164.
 12. Sun, L., Seidou, O., Nistor, I., Liu, K. Review of the Kalman-type hydrological data assimilation. *Hydrological Sciences Journal*. 2016. Vol 61(13). P. 2348–2366. DOI: <https://doi.org/10.1080/02626667.2015.1127376>
 13. Shi X., Wen J., Liu J. et al. Application and improvement of an adaptive ensemble Kalman filter for soil moisture data assimilation. *Sci. China Earth Sci*. 2010. Iss. 53. P. 1700–1708. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11430-010-4107-8>
 14. Wondosen A., Debele Y., Kim S., Shi H., Endale B., Kang B. Bayesian Optimization for Fine-Tuning EKF Parameters in UAV Attitude and Heading Reference System Estimation. *Aerospace*. 2023. Iss 10(12). P. 1010-1023. DOI:<https://doi.org/10.3390/aerospace10121023>
 15. Kuntz S., Rawlings J. Maximum Likelihood Estimation of Linear Disturbance Models for Offset-free Model Predictive Control. *American Control Conference (ACC)*. 2022, P. 3961-3966. DOI: 10.23919/ACC53348.2022.9867344.
 16. Kashyap R. Maximum likelihood identification of stochastic linear systems. *IEEE Trans. Autom. Control*. 1970. vol. AC-15, no. 1. P. 25–34.
 17. Kong He, Sukkarieh S., Travis A., Tianshi C., Biqiang V., Zheng Wei Z. Identifiability Analysis of Noise Covariances for LTI Stochastic Systems with Unknown Inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2023. Vol.: 68, Iss: 7. P.4459 – 4466. DOI: 10.1109/TAC.2022.3208338.
 18. Carew B., P. Belanger P. Identification of optimum filter steady-state gain for systems with unknown noise covariances. *IEEE Trans. Autom. Control*. 1973. Vol. 18, Iss. 6. P. 582-587 .DOI: 10.1109/TAC.1973.1100420
 19. MehraR. Approaches to adaptive filtering. *IEEE Trans. Autom. Control*. 1972. Vol. 17, Iss. 5. P. 693 – 698. DOI: 10.1109/TAC.1972.1100100
 20. Dunik J., Simandl M., Straka O. Methods for Estimating State and Measurement Noise Covariance Matrices: Aspects and Comparison. *IFAC Proceedings Volumes*. 2009. Vol. 42, Iss. 10. P.10372-377. DOI: <https://doi.org/10.3182/20090706-3-FR-2004.00061>.
 21. Volovik A., Semenov A., Havrilov D., Baraban S., Savytskyi A., Zviahin O. Observation Trajectory Model for Radio-Frequency Aviation Landing Systems. *The Fourth International Conference on Information and Telecommunication Technologies and Radio Electronics (UkrMiCo)*. 2019. P. 1-5. DOI: 10.1109/UkrMiCo47782.2019.9165505
 22. Tcheumeleu R., Pouhed D. Analysis of methods for classification of intentional electromagnetic environments. *International Conference on Electromagnetics*
-

in *Advanced Applications (ICEAA)*. 2015. P. 1385-1388. DOI: 10.1109/ICEAA.2015.7297344

23. Zhang J., You K., Xie L. Bayesian Filtering With Unknown Sensor Measurement Losses. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*. 2019. Vol. 6, Iss. 1. P.163-175. DOI: 10.1109/TCNS.2018.2802872.

24. Zabczyk J. *Mathematical Control Theory: An Introduction*. Birkhäuser 2nd ed edition. 2020. 362 p.

25. Sinopoli B., Schenato L., Franceschetti M., Poolla K., Jordan M., Sastry S. Kalman filtering with intermittent observations. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2004. Vol. 49, Iss. 9. P. 1453-1464. DOI: 10.1109/TAC.2004.834121.

REFERENCES:

1. Kalman R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *J. Basic Eng.* vol. 82, no. 1. P. 35–45.

2. Volovyk A., Kychak V., Savytskyi A., Makohon V. (2025). Telemetry channel data estimation exposed to chaotic impulse-pulse disturbances. *System technologies*. № 1 (69). P. 259-268. DOI: <https://doi.org/10.32782/2521-6643-2025-1-69.31>

3. You K., Fu M., Xie L. (2011). Mean square stability for Kalman filtering with Markovian packet losses. *Automatica*. Vol. 47, Iss. 12. P. 2647–2657. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2011.09.015>

4. Li D., Ge X., Lu J. (2025). Multi-sensor fusion positioning method based on adaptive ESKF. *4th International Conference on Electronic Information Technology (EIT)*. P. 300-304, DOI: 10.1109/EIT67313.2025.11232444.

5. Nemati M., Kankashvar M., Bolandi H. (2022). Unscented Kalman Filter adaptive noise covariance selection for satellite formation flying with Q learning. *30th International Conference on Electrical Engineering (ICEE)*. P. 362-367. DOI: 10.1109/ICEE55646.2022.9827301.

6. Fraser C., Ulrich S. (2019). A Fuzzy Adaptive Kalman Filter for Spacecraft Formation Navigation. *American Control Conference (ACC)*. P. 2527-2533. DOI: 10.23919/ACC.2019.8814948.

7. Chen S. Y. (2012). Kalman Filter for Robot Vision: A Survey. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. Vol. 59, Iss. 11. P. 4409-4420. DOI:10.1109/TIE.2011.2162714.

8. Yuzhen P., Quande Y., Benfa Z. (2016). The application of adaptive extended Kalman filter in mobile robot localization. *Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*. P. 5337-5342. DOI: 10.1109/CCDC.2016.7531952.

9. Anderson B., Hossain G. (2025). Enhancing Kalman Filter Resilience in Electric Vehicles: Cyber-Attack Mitigation with Machine Learning Based Adaptive Filtering. *13th International Symposium on Digital Forensics and Security (ISDFS)*. P. 1-6. DOI: 10.1109/ISDFS65363.2025.11011918.

10. Zhang L., Tian D., Sun S. (2025). Robust Adaptive Cubature Kalman Filter Based Neural Network Fault Tolerance Control. *IEEE Sensors Journal*. P(99) 1-1. DOI:10.1109/JSEN.2025.3626546 .

11. Jumantoro E., Pribadi A., Verayiah R., Prasetyo D. (2025). Kalman Filter-Based Adaptive Load Shedding for Solar Photovoltaic Integration in Indonesia's Isolated Grid. *International Conference on Technology and Policy in Energy and Electric Power (ICT-PEP)*. P. 282-287. DOI: 10.1109/ICT-PEP67281.2025.11232164.

12. Sun, L., Seidou, O., Nistor, I., Liu, K. (2016). Review of the Kalman-type hydrological data assimilation. *Hydrological Sciences Journal*, Vol 61(13). P. 2348–2366. DOI: <https://doi.org/10.1080/02626667.2015.1127376>

13. Shi X., Wen J., Liu J. (2010). Application and improvement of an adaptive ensemble Kalman filter for soil moisture data assimilation. *Sci. China Earth Sci.* Iss.53. P. 1700–1708. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11430-010-4107-8>

14. Wondosen A., Debele Y., Kim S., Shi H., Endale B., Kang B. (2023). Bayesian Optimization for Fine-Tuning EKF Parameters in UAV Attitude and Heading Reference

System Estimation. *Aerospace*. Iss 10(12). P. 1010-1023. DOI:<https://doi.org/10.3390/aerospace10121023>

15. Kuntz S., Rawlings J. (2022). Maximum Likelihood Estimation of Linear Disturbance Models for Offset-free Model Predictive Control. *American Control Conference (ACC)*. P. 3961-3966. DOI: 10.23919/ACC53348.2022.9867344.

16. Kashyap R. (1970). Maximum likelihood identification of stochastic linear systems. *IEEE Trans. Autom. Control*. Vol. AC-15, no. 1. P. 25–34.

17. Kong He, Sukkarieh S., Travis A., Tianshi C., Biqiang V., Zheng W. (2023). Identifiability Analysis of Noise Covariances for LTI Stochastic Systems with Unknown Inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol.: 68, Iss: 7. P.4459–4466. DOI: 10.1109/TAC.2022.3208338.

18. Carew B., P. (1973). Belanger P. Identification of optimum filter steady-state gain for systems with unknown noise covariances. *IEEE Trans. Autom. Control*. Vol. 18, Iss. 6, P. 582-587 .DOI: 10.1109/TAC.1973.1100420

19. MehraR. (1972). Approaches to adaptive filtering. *IEEE Trans. Autom. Control*. Vol. 17, Iss. 5. P. 693–698. DOI: 10.1109/TAC.1972.1100100

20. Dunik J., Simandl M., Straka O. (2009). Methods for Estimating State and Measurement Noise Covariance Matrices: Aspects and Comparison. *IFAC Proceedings Volumes*. Vol. 42, Iss.10. P.10372-377.

DOI: <https://doi.org/10.3182/20090706-3-FR-2004.00061>.

21. Volovik A., Semenov A., Havrilov D., Baraban S., Savytskyi A., Zviahin O. (2019). Observation Trajectory Model for Radio-Frequency Aviation Landing Systems. *The Fourth International Conference on Information and Telecommunication Technologies and Radio Electronics (UkrMiCo)*. P. 1-5. DOI: 10.1109/UkrMiCo47782.2019.9165505

22. Tcheumeleu R., Pouhed D. (2015). Analysis of methods for classification of intentional electromagnetic environments. *International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA)*. P. 1385-1388. DOI: 10.1109/ICEAA.2015.7297344

23. Zhang J., You K., Xie L. (2019). Bayesian Filtering With Unknown Sensor Measurement Losses. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*. Vol. 6, Iss. 1. P. 163-175. DOI: 10.1109/TCNS.2018.2802872.

24. Zabczyk J. (2020). *Mathematical Control Theory: An Introduction*. Birkhäuser 2nd ed edition. 362 p.

25. Sinopoli B., Schenato L., Franceschetti M., Poolla K., Jordan M., Sastry S. (2004). Kalman filtering with intermittent observations. *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. 49, Iss. 9. P. 1453-1464. DOI: 10.1109/TAC.2004.834121.

Дата першого надходження статті до видання: 16.12.2025

Дата прийняття статті до друку після рецензування: 19.01.2026

Дата публікації (оприлюднення) статті: 07.04.2026