УДК 004.4:621.865

Г. Г. Мидинський[1]
Р. С. Белзецький[1]

ЗАСТОСУВАННЯ МАТРИЦІ ЯКОБІ В ПРОГРАМНІЙ РЕАЛІЗАЦІЇ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ КІНЕМАТИКИ МАНІПУЛЯТОРА

[1]Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі розглянуто застосування матриці Якобі в задачах диференціальної кінематики робота-маніпулятора в межах розробки комп'ютерної програми розрахунку прямої та оберненої задач кінематики. Проаналізовано математичну сутність матриці Якобі як інструменту встановлення зв'язку між узагальненими координатами та швидкістю робочого органу. Описано геометричний підхід до формування Якобіана на основі параметрів Денавіта–Хартенберга. Розглянуто використання транспонованої матриці Якобі в ітераційних алгоритмах розв'язання оберненої задачі кінематики. Особливу увагу приділено аналізу сингулярних конфігурацій та оцінці стабільності обчислень за допомогою визначника матриці JJ^T. Показано, що контроль цього критерію підвищує надійність та стійкість роботи алгоритму позиціонування маніпулятора.За результатами, представленими у роботі, отримано свідоцтво про державну реєстрацію авторського права на комп'ютерні програми: «Комп'ютерна програма для розв'язання оберненої задачі кінематики робота-маніпулятора» №142939 від 19.02.2026 [1].

Ключові слова: робот-маніпулятор, матриця Якобі, обернена задача кінематики, диференціальна кінематика, сингулярні положення, стабільність обчислень, комп'ютерне моделювання.

Abstract

The paper considers the application of the Jacobian matrix in the differential kinematics of a robotic manipulator within the framework of developing a computer program for solving forward and inverse kinematics problems. The mathematical essence of the Jacobian as a tool for establishing the relationship between generalized coordinates and the velocity of the Tool Center Point is analyzed. A geometric approach to constructing the Jacobian based on Denavit–Hartenberg parameters is described. The use of the transposed Jacobian matrix in iterative algorithms for solving the inverse kinematics problem is considered. Special attention is paid to the analysis of singular configurations and numerical stability assessment using the determinant of the matrix JJ^T. It is shown that controlling this criterion improves the reliability and robustness of the manipulator positioning algorithm. Based on the results presented in the work, a certificate of state registration of copyright for computer programs was obtained: "Computer program for solving the inverse problem of kinematics of a robot manipulator" No. 142939 dated 02/19/2026 [1].

Keywords: robotic manipulator, Jacobian matrix, inverse kinematics, differential kinematics, singular configurations, numerical stability, computer modeling.

Вступ

Сучасні робототехнічні системи широко застосовуються в промисловості, медицині, логістиці та автоматизованих виробничих комплексах. Одним із ключових елементів таких систем є робот-маніпулятор, точність та ефективність роботи якого визначається коректністю розв'язання задач кінематики. Пряма задача кінематики дозволяє визначити положення та орієнтацію робочого органу за заданими узагальненими координатами, тоді як обернена задача передбачає знаходження таких параметрів ланок, які забезпечують досягнення заданої просторової точки.

Обернена задача кінематики є складнішою через нелінійний характер залежностей між кутами повороту ланок і координатами робочого органу. У загальному випадку її аналітичний розв'язок відсутній або має значні обмеження, що зумовлює необхідність застосування чисельних методів. Ефективним інструментом для побудови таких методів є матриця Якобі, яка встановлює диференціальний зв'язок між швидкостями узагальнених координат і лінійною швидкістю робочої точки маніпулятора.

Основна частина

Матриця Якобі дозволяє виконувати лінеаризацію кінематичних рівнянь у околі поточної конфігурації, що є основою ітераційних алгоритмів розв'язання оберненої задачі кінематики. Разом з тим використання Якобіана пов'язане з проблемою сингулярних положень, у яких зменшується ранг матриці та погіршується обумовленість задачі. Це може призводити до нестійкості чисельних обчислень та втрати керованості маніпулятора.

У зв'язку з цим дослідження властивостей матриці Якобі, аналіз її впливу на стабільність алгоритмів та контроль сингулярних конфігурацій є важливими складовими розробки комп'ютерної програми розрахунку прямої та оберненої задач кінематики робота-маніпулятора.

У процесі розробки комп'ютерної програми розрахунку прямої та оберненої задачі кінематики робота-маніпулятора важливе місце займає математичний апарат диференціальної кінематики. Якщо пряма задача кінематики дозволяє визначити положення робочого органу за відомими значеннями узагальнених координат, то обернена задача є значно складнішою через нелінійний характер залежностей.

Для її чисельного розв'язання використовується матриця Якобі, яка встановлює зв'язок між швидкостями ланок і швидкістю робочої точки маніпулятора [2].

Нехай маніпулятор має nступенів вільності з вектором узагальнених координат:

$$\mathrm{q} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T$$

Положення робочого органу маніпулятора у декартовій системі координат описується вектором:

$$p = [x, y, z]^T$$

Оскільки координати TCP є функціями узагальнених координат,

$$p = f(q),$$

то після диференціювання за часом отримуємо:

$$\dot{p} = J(q)\dot{q}$$

де $J(q) = \frac{\partial f}{\partial q}$ — матриця Якобі розмірністю $3 \times n$.

Таким чином, матриця Якобі є матрицею частинних похідних, яка утворює нелінійну залежність між узагальненими координатами та положенням робочої точки в околі поточної конфігурації.

У програмній реалізації для маніпулятора з обертальними кінематичними парами використовується геометричний підхід до формування матриці Якобі.

і-й стовпчик визначається як:

$$J_i = z_{i-1} \times (p_{TCP} - p_{i-1})$$

де: змінна z_{i-1} відповідає за вектор осі обертання відповідної ланки,p_{i-1} за положення початку координат ланки, а p_{TCP} за положення робочої точки; вектори z_iта p_i визначаються з матриць однорідних перетворень, отриманих за методом Денавіта–Хартенберга.

Фізично кожен стовпчик Якобіана показує, як зміна відповідного кута впливає на миттєву швидкість робочої точки.

Оскільки аналітичний розв'язок оберненої задачі кінематики можливий лише для окремих типів маніпуляторів, у програмі застосовується чисельний ітераційний метод на основі матриці Якобі [3].

Формується вектор похибки:

$$e = p_{target} - p_{TCP}$$

Корекція узагальнених координат виконується за формулою:

$$q^{(k+1)} = q^{(k)} + \lambda J^T(q^{(k)})e$$

де λ— коефіцієнт кроку ітерації.

Транспонована матриця Якобі виконує проекцію похибки з декартового простору в простір узагальнених координат, що забезпечує поступове зменшення помилки позиціонування.

Однією з важливих проблем використання матриці Якобі є наявність сингулярних положень.

Сингулярність виникає тоді, коли ранг матриці зменшується:

$$rank(J) < 3$$

У таких положеннях маніпулятор втрачає ступені рухливості, також різко зростають необхідні зміни кутів. В результаті погіршується точність і стійкість алгоритму.

Для оцінки близькості до сингулярності використовується критерій:

$$det(JJ^T)$$

Наближення цього значення до нуля свідчить про погіршення обумовленості задачі та необхідність корекції параметрів алгоритму.

Контроль цього показника в програмній реалізації дозволяє підвищити стабільність чисельних обчислень, уникнути нестійких конфігурацій, що забезпечить надійну збіжність ітераційного процесу.

На рисунку 1 представлено UML діаграму структури розроблюваної програми.

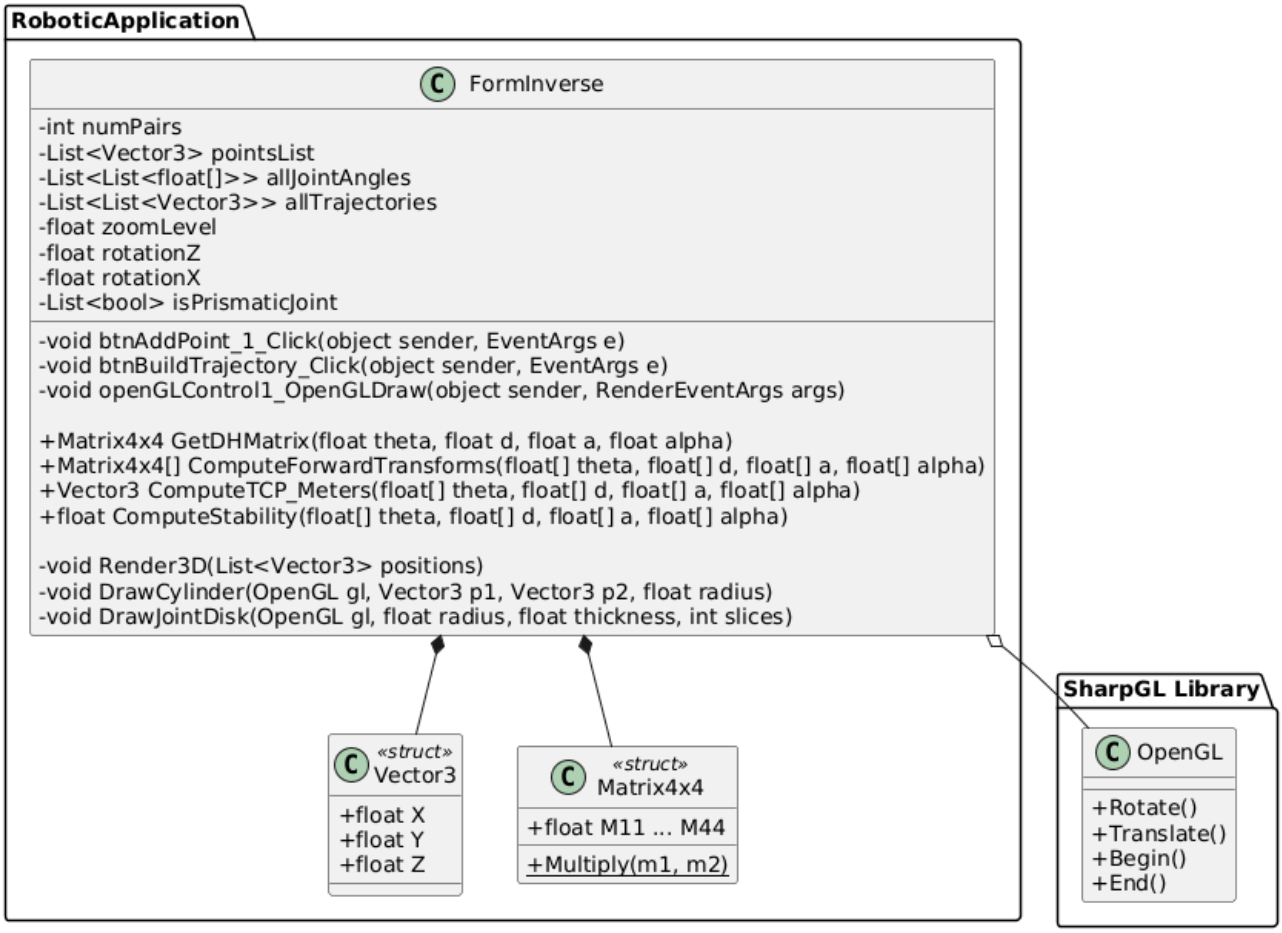

Рисунок 1 – UML діаграма

Розроблена UML-діаграма класів відображає архітектуру програмного забезпечення для моделювання та аналізу кінематики маніпуляторів. Основним структурним елементом є клас FormInverse, який виступає центром інтеграції обчислювальної логіки та графічного представлення. Тестові значення маніпулятора зображені на рисунку 2.

№	θ (°)	θ min (°)	θ max (°)	d (мм)	a (мм)	Alpha (°)
1	0	-360	360	70	0	90
2	0	-360	360	0	82	0
3	0	-360	360	0	128	0
4	0	-360	360	0	60	0

Рисунок 2 – Параметри маніпулятора

Завданням для тестування програми було побудувати положення маніпулятора, захоплювач якого знаходився в координатах x = 150; y = 100; z = 0; після чого наступне положення маніпулятора з захоплювачем в координатах x = 150; y = -100; z = 0 [4]. Результат введення початкового та кінцевого положення маніпулятора представлено на рисунку 3.

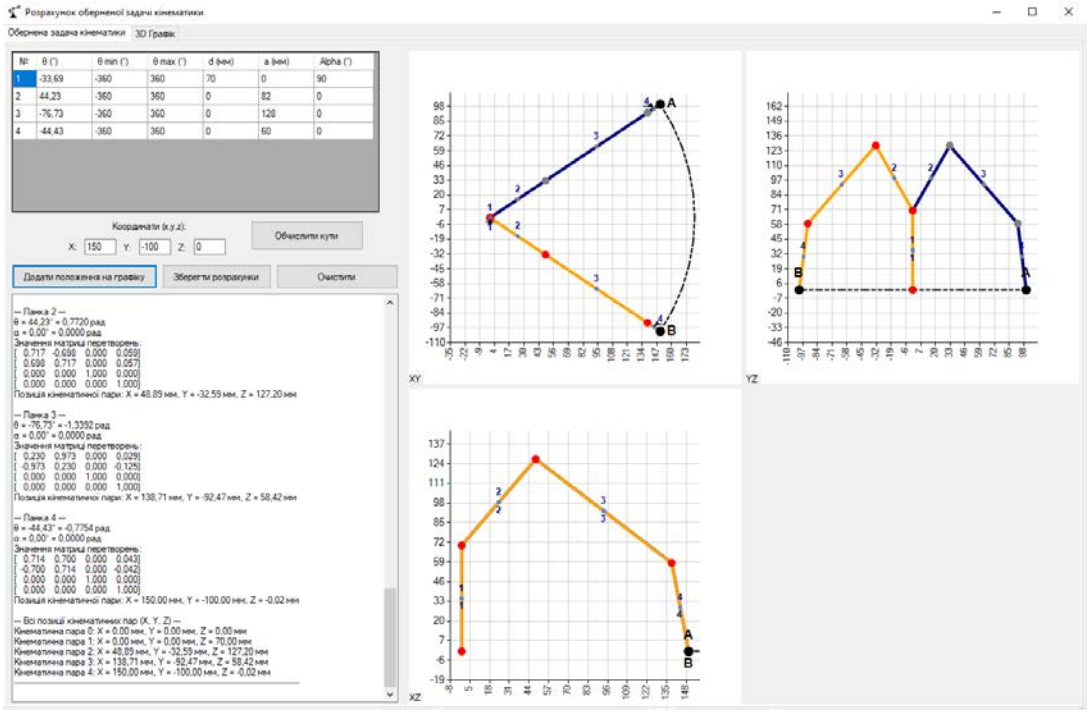

Рисунок 3 – Результат введення двох положень маніпулятора

На рисунку 4 представлено 3D візуалізацію роботи програми:

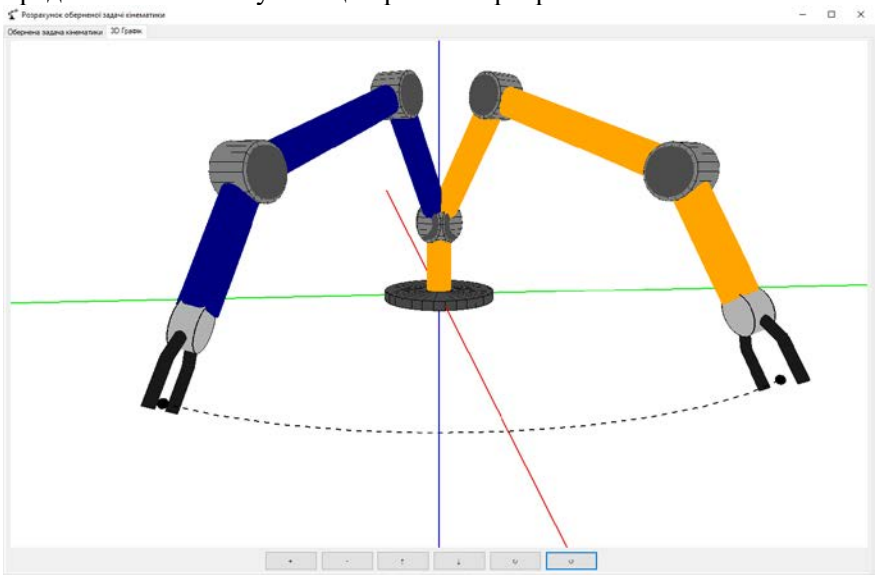

Рисунок 4 – 3D візуалізація

Висновки

Матриця Якобі є ключовим елементом реалізації оберненої задачі кінематики в розробленій комп'ютерній програмі. Вона забезпечує диференціальний зв'язок між узагальненими координатами та швидкістю робочого органу, дозволяє реалізувати ітераційні методи пошуку розв'язку та виконувати аналіз сингулярних конфігурацій.

Оцінка визначника JJ^T підвищує стабільність обчислень і забезпечує надійність роботи алгоритму позиціонування маніпулятора.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Свідоцтво про державну реєстрацію авторського права на твір «Комп'ютерна програма для розв'язання оберненої задачі кінематики робота-маніпулятора» / Р. С. Белзецький, Г. Г. Мидинський. – №142939. – Україна, 2026.

2. Zhang X., Chen B., Zhao Y. Inverse kinematics solution of robotic manipulator based on Jacobian matrix and numerical methods // *Journal of Robotics*. – 2014. – Vol. 2014. – Article ID 1532. – [Електронний ресурс]. –https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2090123214001532

3. Buss S.R. Introduction to inverse kinematics with Jacobian transpose, pseudoinverse and damped least squares methods // *Journal of Intelligent & Robotic Systems*. – 2012. – Vol. 68. – No. 3–4. – P. 279–298. [Електронний ресурс]. – https://link.springer.com/article/10.1007/s10846-012-9679-4

4. Белзецький Р. С. Розв'язання прямої задачі кінематики робота-маніпулятора з чотирма ступенями свободи // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2025. – № 5. – С. 61–68. – DOI: 10.31649/1997-9266-2025-182-5-61-68.

Мидинський Геннадій Геннадійович – студент групи 3КН-22б, факультет інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет,м. Вінниця, E-mail *stajor33@gmail.com;*

Белзецький Руслан Станіславович – канд. техн. наук, доцент кафедри комп'ютерних наук, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, E-mail: *belzetskyi@vntu.edu.ua;*

Mydynskyi Hennadii H. – Student of group 3KN-22b, Faculty of Intelligent Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Ukraine, E-mail *stajor33@gmail.com;*

Belzetskyi Ruslan S. – Cand. Sc. (Eng.), Assistant Professor of the Chair of Integration Education with Production, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, E-mail: *belzetskyi@vntu.edu.ua*.