НЕСТАНДАРТНИЙ АНАЛІЗ В ЕЛЕКТРОТЕХНІЦІ: ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ІНДУКТИВНОМУ КОЛІ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ З ПОРУШЕННЯМ ЗАКОНІВ КОМУТАЦІЇ

Кухарчук Василь Васильович
д.т.н., професор
Кацив Самоїл Шулімович
к.т.н., доцент
Мадьяров Вячеслав Губейович
к.т.н., професор
Стадник Єгор Григорович
студент
Вінницький національний технічний університет
м. Вінниця, Україна

Вступ. Під час аналізу перехідних процесів в колах постійного струму часто виникає проблема, коли незалежні початкові умови неможливо визначити виходячи із законів комутації. В цих випадках доводиться використовувати так звані узагальнені закони – закон збереження потокозчеплення або збереження заряду. Тому розрахунки перехідних процесів суттєво ускладнюється.

Вирішити дану проблему можливо за допомогою методів *нестандартного аналізу*. Цим методам притаманна не дуже складна аксіоматика і вони дозволяють зберегти закони комутації завдяки *безпосередньому* використанню *нескінченно малих або великих чисел* .

Мета роботи. Застосування методів нестандартного аналізу в електротехніці для аналізу перехідних процесів в індуктивному колі першого порядку з порушенням законів комутації.

Матеріали та методи. Розглянемо основи нестандартного аналізу.

Нехай R – впорядкована множина дійсних чисел. Число α будемо називати *нескінченно малим числом* тоді та лише тоді, коли

$$\forall r \in R(\alpha < r). \tag{1}$$

Число $\beta = \dfrac{1}{\alpha}$ будемо називати *нескінченно великим числом*. В цьому випадку можна записати

$$\forall r \in R(\beta > r). \qquad (2)$$

До нескінченно малих та великих чисел можуть бути застосовані всі алгебраїчні операції (додавання, віднімання, множення, ділення, зведення в ступінь тощо) та теореми (комутативності, асоціативності тощо).

Будемо розрізняти нескінченно малі та великі числа різного порядку, а саме:

- $\alpha > \alpha^2 > \alpha^3 > \alpha^k$ – нескінченно малі числа першого, другого, третього, k -го порядку;
- $\beta < \beta^2 < \beta^3 < \beta^k$ – нескінченно великі числа першого, другого, третього, k -го порядку.

Для дійсних чисел m та n запишемо деякі співвідношення:

$$\frac{1}{\alpha^k} = \beta^k,\ \frac{m}{\alpha} = m\beta,\ \frac{m}{\alpha^k} = m\beta^k,\ \frac{m\alpha}{n\alpha} = \frac{m}{n},\ \frac{m\alpha}{n} = \frac{m}{n}\alpha,\ \frac{m}{n\alpha} = \frac{m}{n}\beta, \qquad (3)$$

$$m\alpha + n \approx n,\ m\beta + n \approx m\beta,\ m\alpha^k + n \approx n,\ m\beta^k + n \approx m\beta^k. \ (4)$$

Цілком природно, що таку ж нестандартну структуру може мати не лише множина дійсних чисел, а і множина уявних чисел, тобто площина комплексних чисел, тобто:

$$m\alpha + jn \approx jn,\ m\beta + jn \approx m\beta,.\ m + jn\alpha \approx m,\ m + jn\beta \approx jn\beta. \ (5)$$

Крім того, задачі класичного аналізу перехідних процесів вимагають безпосереднього використання стандартного числа 0 і нескінченної величини ∞ тому сформулюємо їх нестандартну інтерпретацію.

Стандартне число 0 в нестандартному аналізі можна розглядати як *нескінченно мале число нескінченно великого порядку,* тобто

$$0 \approx \alpha^\beta, \qquad (6)$$

тому

$$\frac{0}{\alpha} \approx 0,\ 0 \cdot \beta \approx 0,\ e^{-\beta \cdot 0} \approx 1,\ e^{-\alpha} \approx 1,\ e^{\alpha} \approx 1. \quad (7)$$

Нескінченна величина ∞ в нестандартному аналізі може бути подана як *нескінченно велике число нескінченно великого порядку*, тобто

$$\infty \approx \beta^{\beta}, \quad (8)$$

Тому

$$\frac{\infty}{\beta} \approx \infty,\ \infty \cdot \alpha \approx \infty,\ e^{-\infty \cdot \alpha} \approx \alpha,\ e^{-\beta} \approx \alpha. \quad (9)$$

Перед тим, як перейти до застосування вищенаведених виразів для розв'язання різноманітних прикладних задач зазначимо, що не існує загальних правил вибору параметру, який доцільно прирівняти до нескінченно малого (або нескінченно великого) числа. Цей вибір здійснюється дослідником в залежності від контексту конкретної задачі. При цьому слід мати на увазі, що у випадку необхідності заміни нескінченно малими числами одразу кількох різнорідних параметрів однієї задачі, визначення співвідношень між цими числами є зовсім непростою проблемою і вимагає, іноді, додаткових досліджень.

Результати та обговорення. Розглянемо яким чином методи нестандартного аналізу можуть бути використані для аналізу складного кола постійного струму з ідеальними індуктивними елементами (рис. 1).

Розглянемо коло, яке наведено на рис. 1. Параметри схеми: $U = 600$ В, $r_1 = r_2 = 20$ Ом, $L_1 = 0.2$ Гн, $L_2 = 0.3$ Гн. Визначимо перехідні струми $i_1(t)$, $i_2(t)$.

Зазвичай, в такому електричному колі аналіз перехідного процесу виконують застосовуючи узагальнений закон комутації, який відноситься до потокозчеплень. Разом з тим, ми можемо використати і звичайний закон комутації, якщо застосувати методи нестандартного аналізу.

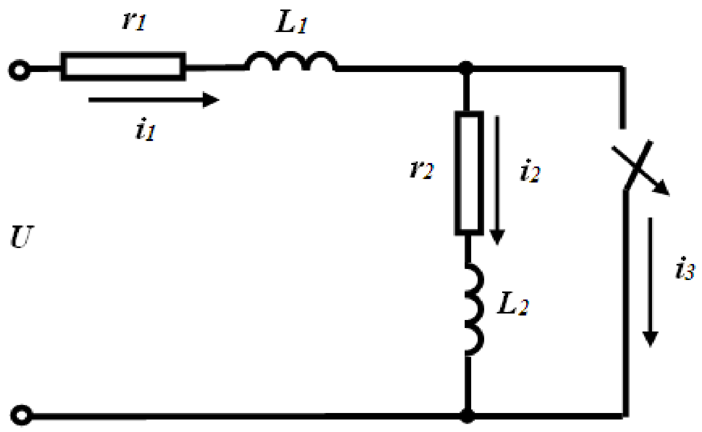

Рисунок 1 – Коло з ідеальними індуктивностями

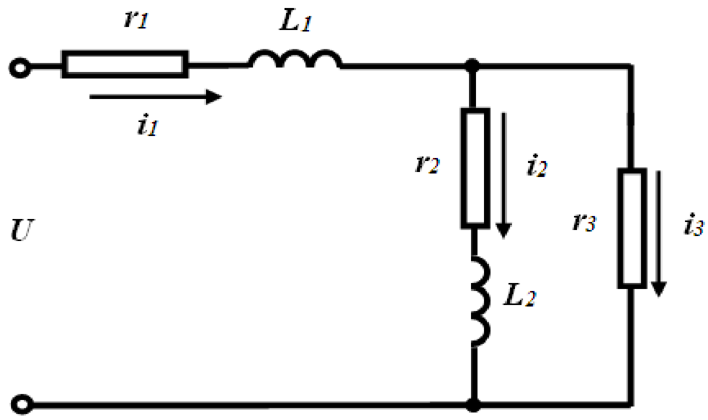

Рисунок 2 – Еквівалентне коло з ідеальними індуктивностями

Оскільки вітка з комутаційним апаратом до комутації була закорочена, будемо вважати, що до комутації вона мала опір $r_3 = \alpha$. Після комутації замінимо розрив цієї вітки нескінченно великим опором $r_3 = \beta = \dfrac{1}{\alpha}$ (рис. 2)

Тоді початкові умови знаходять так:

$$i_1(0_+) = i_1(0_-) = \frac{U}{r_1 + \dfrac{r_2 r_3}{r_2 + r_3}} = \frac{U}{r_1 + \dfrac{r_2 \alpha}{r_2 + \alpha}} \approx \frac{U}{r_1} = 30 \text{ A},$$

$$i_2(0_+) = i_2(0_-) = i_1(0_-)\frac{r_3}{r_2 + r_3} = i_1(0_-)\frac{\alpha}{r_2 + \alpha} \approx 0 \text{ A},$$

$$i_3(0_-) = i_1(0_-)\frac{r_2}{r_2 + r_3} = i_1(0_-)\frac{r_2}{r_2 + \alpha} \approx i_1(0_-) \approx 30 \text{ A}.$$

Примусову складову визначимо як:

$$i_{1пр}=\frac{U}{r_1+\dfrac{r_2\dfrac{1}{\alpha}}{r_2+\dfrac{1}{\alpha}}}=\frac{U}{r_1+\dfrac{r_2}{\alpha r_2+1}}\approx\frac{U}{r_1+r_2}=15\ \text{А},$$

$$i_{2пр}=\frac{U}{r_1+\dfrac{r_2\dfrac{1}{\alpha}}{r_2+\dfrac{1}{\alpha}}}\frac{\dfrac{1}{\alpha}}{r_2+\dfrac{1}{\alpha}}=\frac{U}{r_1+\dfrac{r_2}{\alpha r_2+1}}\frac{1}{\alpha r_2+1}\approx\frac{U}{r_1+r_2}=15\ \text{А}.$$

За методом вхідного опору

$$Z_{вх}(p)=r_1+pL_1+\frac{(r_2+pL_2)\dfrac{1}{\alpha}}{r_2+pL_2+\dfrac{1}{\alpha}}=$$

$$\frac{r_1r_2+pr_1L_2+r_1\dfrac{1}{\alpha}+pr_2L_1+p\dfrac{1}{\alpha}L_1+p^2L_1L_2+r_2\dfrac{1}{\alpha}+p\dfrac{1}{\alpha}L_2}{r_2+pL_2+\dfrac{1}{\alpha}}$$

сформуємо характеристичне рівняння:

$$\begin{aligned}&p^2L_1L_2+p\left(r_2L_1+r_1L_2+\frac{1}{\alpha}L_1+\frac{1}{\alpha}L_2\right)+r_1r_2+\frac{1}{\alpha}(r_1+r_2)=\\&=\alpha p^2L_1L_2+p(\alpha r_2L_1+\alpha r_1L_2+L_1+L_2)+\alpha r_1r_2+(r_1+r_2)=0.\end{aligned}\qquad(10)$$

Це квадратне рівняння має два корені. Перший з них можна визначити, виконавши еквівалентні перетворення рівняння (10):

$$\begin{aligned}&\alpha p^2L_1L_2+p(\alpha r_2L_1+\alpha r_1L_2+L_1+L_2)+\alpha r_1r_2+(r_1+r_2)\approx\\&\approx p(L_1+L_2)+(r_1+r_2)=0.\end{aligned}\qquad(11)$$

Звідси випливає $p_1=-\dfrac{r_1+r_2}{L_1+L_2}=-80$ с$^{-1}$.

Другий корінь знайдемо за допомогою теореми Вієта: *для квадратного рівняння* $ap^2+bp+c=0$ *справедлива формула* $p_1p_2=\dfrac{c}{a}$*, або* $p_2=\dfrac{c}{ap_1}$.

З характеристичного рівняння (10) випливає, що $c=\alpha r_1r_2+r_1+r_2$, а

$a = \alpha L_1 L_2$, тому:

$$p_2 = \frac{\alpha r_1 r_2 + r_1 + r_2}{\alpha L_1 L_2\left(-\dfrac{r_1 + r_2}{L_1 + L_2}\right)} = -\frac{(r_1 + r_2)(L_1 + L_2)}{\alpha L_1 L_2 (r_1 + r_2)} = -\frac{\beta(L_1 + L_2)}{\alpha L_1 L_2} = -\frac{8.333}{\alpha} \text{ с}^{-1}.$$

Тоді $i_2(t) = i_{2пр} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = 15 + A_1 e^{-80t} + A_2 e^{-\frac{8.333}{\alpha}t}$, а

$$i_1(t) = i_2(t) + \frac{i_2(t) r_2 + L_2 \dfrac{di_2(t)}{dt}}{r_3} = \left(i_{2пр} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}\right) +$$

$$+ \alpha r_2\left(i_{2пр} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}\right) + \alpha L_2 p_1 A_1 e^{p_1 t} + \alpha L_2 p_2 A_2 e^{p_2 t} \approx$$

$$\approx 15 + A_1 e^{-80t} + A_2 e^{-\frac{8.333}{\alpha}t} - \left(\alpha \cdot 0.3 \cdot \frac{8.333}{\alpha}\right) A_2 e^{-\frac{8.333}{\alpha}t}$$

$$\approx 15 + A_1 e^{-80t} - 1.5 A_2 e^{-\frac{8.333}{\alpha}t}.$$

Струм $i_3(t)$ визначається як $i_3(t) = i_1(t) - i_2(t) = -2.5 A_2 e^{-\frac{8.333}{\alpha}t}$.

Для визначення сталих інтегрування необхідно в отриманих виразах підставити замість змінної t значення початкового моменту часу $t = 0_+ \approx \alpha_1$ (початковий моменту часу позначається символом α_1, оскільки за своєю фізичною природою відрізняється від опору $r_3 = \beta = \dfrac{1}{\alpha}$).

При цьому виникає невизначеність $e^{-8.333\frac{\alpha_1}{\alpha}}$.

Співвідношення нескінченно малих чисел α та α_1 неможливо встановити суто математичним шляхом, оскільки вони відносяться до *різнорідних* параметрів. Проаналізуємо їх з фізичної точки зору. Нагадаємо, що α_1 – це *початковий моменту часу*, а α – це *активна провідність розриву кола*, яку ми спеціально вводимо для виконання стандартних законів комутації. Оскільки ці величини є *незалежними* одна від одної, то *завжди* можна вибрати їх так, щоб забезпечити умову $\alpha_1 \approx \alpha^2$.

Таким чином можна записати $e^{-8.333\frac{\alpha_1}{\alpha}} = e^{-8.333\frac{\alpha^2}{\alpha}} = e^{-8.333\alpha} \approx 1$.

Система рівнянь для визначення сталих інтегрування виглядає так:

$$15 + A_1 - 1.5A_2 = 30,$$
$$15 + A_1 + A_2 = 0.$$

Звідси $A_1 = -3$, $A_2 = -12$.

Таким чином $i_1(t) = 15 - 3e^{-80t} + 18e^{-\frac{8.333}{\alpha}t}t$, $i_2(t) = 15 - 3e^{-80t} - 12e^{-\frac{8.333}{\alpha}t}t$,

$$i_3(t) = 30e^{-\frac{8.333}{\alpha}t}.$$

Оскільки $e^{-\frac{8.333}{\alpha}t} \approx \alpha$, можна записати

$$\forall(t > 0 \wedge t \neq 0_+)\, i_1(t) = 15 - 3e^{-80t} + 18e^{-\frac{8.333}{\alpha}t} \approx$$
$$\approx 15 - 3e^{-80t} + 18\alpha \approx 15 - 3e^{-80t},$$
$$\forall(t > 0 \wedge t \neq 0_+)\, i_1(t) = 15 - 3e^{-80t} - 12e^{-8.333\beta t} \approx$$
$$\approx 15 - 3e^{-80t} - 12\alpha \approx 15 - 3e^{-80t},$$
$$\forall(t > 0 \wedge t \neq 0_+)\, i_3(t) = 30e^{-8.333\beta t} \approx 30\alpha \approx 0.$$

Висновки

1. Авторами вперше встановлено клас нестандартних електротехнічних задач, спрямованих на аналіз перехідних процесів в електричних колах постійного струму з порушенням законів комутації. Показано, що розв'язок виділеного класу задач стандартними методами теоретичної електротехніки є занадто складним.

2. Для вирішення виділеної проблеми запропоновано поширити методи нестандартного аналізу на такі задачі завдяки тому, що розімкнений комутаційний апарат заміняється нескінченно великим опором. Переваги такого підходу підтверджені в наведеному прикладі.