УДК 621.313

НЕСТАНДАРТНИЙ АНАЛІЗ В ЕЛЕКТРОТЕХНІЦІ: ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЄМНІСНОМУ КОЛІ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ З ПОРУШЕННЯМ ЗАКОНІВ КОМУТАЦІЇ

Мадьяров Вячеслав Губейович
к.т.н., доцент
Кацив Самоїл Шулімович
к.т.н., доцент
Кухарчук Василь Васильович
д.т.н., професор
Гнелиця Богдан Миколайович
студент
Вінницький національний технічний університет
м. Вінниця, Україна

Анотація. В роботі запропоновано використання ідей та методів нестандартного аналізу в галузі теоретичної електротехніки. Розглянуто аналіз перехідного процесу в ємнісному колі першого порядку з порушенням законів комутації.

Ключові слова: нескінченно мале число, нескінченно велике число, нестандартне число, стандартне число, ємнісне коло, перехідний процес.

Вступ

При аналізі перехідних процесів в електричних колах іноді виникає не зажди незалежні початкові умови можливо визначити виходячи із законів комутації, існують кола з порушенням законів комутації. В цих випадках доводиться використовувати так звані узагальнені закони – закон збереження потокозчеплення (для індуктивних кіл) або закон збереження заряда (для ємнісних кіл). При цьому розрахунок перехідного процесу суттєво ускладнюється.

Цього можна уникнути за допомогою методів *нестандартного аналізу*.

Ці методи за допомогою не дуже складної аксіоматики дозволяють зберегти закони комутації завдяки *безпосередньому* використанню *нескінченно малих або великих чисел* .

Нагадаємо аксіоматику нестандартного аналіза.

Нехай R – впорядкована множина дійсних чисел. Число α будемо називати *нескінченно малим числом* тоді та лише тоді, коли

$$\forall r \in R(\alpha < r). \qquad (1)$$

В свою чергу обернене число $\beta = \dfrac{1}{\alpha}$ будемо називати *нескінченно великим числом*.

До нескінченно малих та великих чисел можуть бути застосовані всі алгебраїчні операції (додавання, віднімання, множення, ділення, зведення в ступінь тощо) та теореми (комутативності, асоціативності тощо).

Будемо розрізняти нескінченно малі та великі числа різного порядку:

- $\alpha > \alpha^2 > \alpha^3 > \alpha^k$ – нескінченно малі числа першого, другого, третього, k -го порядку;
- $\beta < \beta^2 < \beta^3 < \beta^k$ – нескінченно великі числа першого, другого, третього, k -го порядку.

Разом з дійсними числами $r \in R$ нескінченно малі та великі числа утворюють впорядковану множину *гіпердійсних* чисел $*R$. Прийнято називати дійсні числа $r \in R$ *стандартними* або *архімедовими* на відміну від *нестандартних* (*неархімедових*) чисел $*r \in *R$. Позначення $\approx$ буде означати еквівалентність двох нестандартних чисел.

Для стандартних чисел m та n запишемо деякі співвідношення:

$$\frac{m}{\alpha^k} = m\beta^k,\ \frac{m\alpha}{n\alpha} = \frac{m}{n},\ \frac{m}{n\alpha} = \frac{m}{n}\beta,\ m\alpha^k + n \approx n,\ m\beta^k + n \approx m\beta^k. \qquad (2)$$

Цілком природньо, що таку ж нестандартну структуру може мати не лише множина дійсних чисел, а і множина уявних чисел, тобто площина комплексних чисел, тобто

$$m\alpha + jn \approx jn,\ m\beta + jn \approx m\beta,.\ m + jn\alpha \approx m,\ m + jn\beta \approx jn\beta. \quad (3)$$

Стандартне число 0 в нестандартному аналізі можна розглядати як *нескінченно мале число нескінченно великого порядку*, тобто

$$0 \approx \alpha^{\beta}, \quad (4)$$

тому

$$\frac{0}{\alpha} \approx 0,\ 0 \cdot \beta \approx 0,\ e^{-\beta \cdot 0} \approx 1,\ e^{-\alpha} \approx 1,\ e^{\alpha} \approx 1. \quad (5)$$

Нескінченна величина ∞ в нестандартному аналізі може бути подана як *нескінченно велике число нескінченно великого порядку*, тобто

$$\infty \approx \beta^{\beta}, \quad (6)$$

тому

$$\frac{\infty}{\beta} \approx \infty,\ \infty \cdot \alpha \approx \infty,\ e^{-\infty \cdot \alpha} \approx \alpha,\ e^{-\beta} \approx \alpha. \quad (7)$$

Перед тим, як перейти до застосування вищенаведених виразів для розв’язання різноманітних прикладних задач зазначимо, що не існує загальних правил вибору параметру, який доцільно прирівняти до нескінченно малого (або нескінченно великого) числа. Цей вибір здійснюється дослідником в залежності від контексту конкретної задачі. При цьому слід мати на увазі, що у випадку необхідності заміни нескінченно малими числами одразу кількох різнорідних параметрів однієї задачі, визначення співвідношень між цими числами є зовсім непростою проблемою і вимагає, іноді, додаткових досліджень.

Перехідні процеси в ємнісному колі першого порядку з порушенням законів комутації

Визначимо перехідні напруги на ємностях в колі, що зображене на рис. 1.

Параметри кола: $U = 100$ В, $r_1 = 10$ Ом, $C_2 = 100$ мкФ, $C_3 = 150$ мкФ.

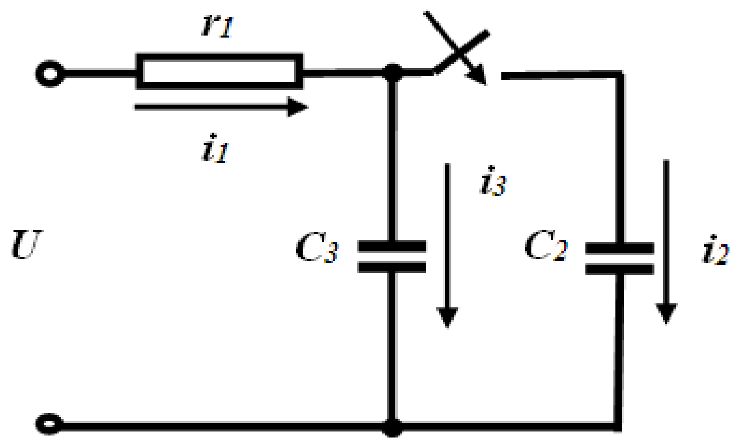

Рисунок 1 – Коло з ідеальними ємностями

Для забезпечення можливості використання другого закону комутації будемо вважати, що вітка з ємністю C_2 містить резистор $r_2 = \alpha$ (рис. 2).

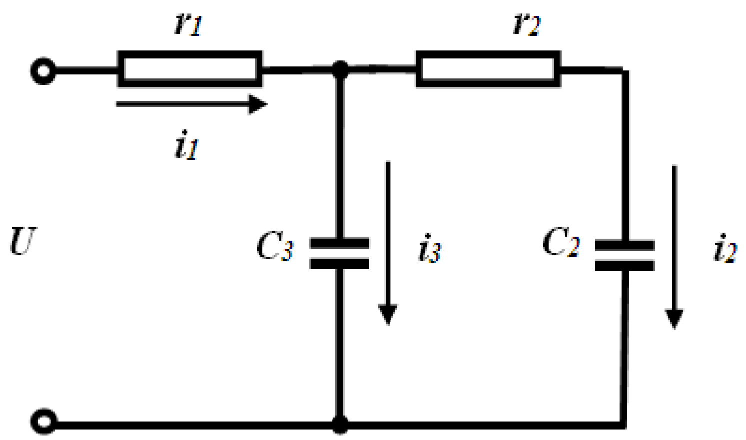

Рисунок 2 – Еквівалентне коло з ідеальними ємностями

Початкові умови знаходяться як

$$u_{C_3}(0_+) = u_{C_3}(0_-) = U = 100 \text{ В},$$

$$u_{C_2}(0_+) = u_{C_2}(0_-) = 0 \text{ В}.$$

Примусову складову визначимо як

$$u_{C_2 пр} = u_{C_3 пр} = U = 100 \text{ В}.$$

За методом вхідного опору

$$Z_{вх}(p)=r_1+\frac{\left(r_2+\frac{1}{pC_2}\right)\frac{1}{pC_3}}{r_2+\frac{1}{pC_2}+\frac{1}{pC_3}}=r_1+\frac{\left(\alpha+\frac{1}{pC_2}\right)\frac{1}{pC_3}}{\alpha+\frac{1}{pC_2}+\frac{1}{pC_3}}=$$

$$=\frac{r_1\left(\alpha C_2C_3p^2+(C_2+C_3)p\right)+\alpha C_2p+1}{\alpha C_2C_3p^2+(C_2+C_3)p}=$$

$$=\frac{\alpha r_1C_2C_3p^2+[r_1(C_2+C_3)+\alpha C_2]p+1}{\alpha C_2C_3p^2+(C_2+C_3)p}$$

сформуємо характеристичне рівняння:

$$\alpha r_1C_2C_3p^2+[r_1(C_2+C_3)+\alpha C_2]p+1=0\,. \qquad (8)$$

Це квадратне рівняння має два корені, перший з яких визначимо, виконавши відповідні перетворення

$$\alpha r_1C_2C_3p^2+[r_1(C_2+C_3)+\alpha C_2]p+1\approx r_1(C_2+C_3)p+1=0\,,$$

звідки

$$p_1=-\frac{1}{r_1(C_2+C_3)}=-400\ \text{с}^{-1}.$$

Другий корінь знайдемо згідно теоремі Вієта (для квадратного рівняння $ap^2+bp+c=0$ справедлива формула $p_1p_2=\frac{c}{a}$)

$$p_2=\frac{c}{p_1a}=-\frac{1}{\alpha r_1C_2C_3\frac{1}{r_1(C_2+C_3)}}=-\frac{C_2+C_3}{\alpha C_2C_3}=-\frac{16667}{\alpha}\ \text{с}^{-1}.$$

Тоді

$$u_{C_2}(t)=U+A_1e^{p_1t}+A_2e^{p_2t}=100+A_1e^{-400t}+A_2e^{-\frac{16667}{\alpha}t}, \qquad (9)$$

а

$$u_{C_3}(t)=u_{C_2}(t)+\alpha C_2\frac{du_{C_2}(t)}{dt}=U+A_1e^{p_1t}+A_2e^{p_2t}+$$

$$+\alpha C_2\left(A_1p_1e^{p_1t}+A_2p_2e^{p_2t}\right)=100+A_1e^{-400t}+A_2e^{-\frac{16667}{\alpha}t}-$$

$$-\alpha 10^{-4}(400)A_1e^{-400t}-\alpha 10^{-4}\left(\frac{16667}{\alpha}\right)A_2e^{-\frac{16667}{\alpha}t}=100+ \qquad (10)$$

$$+A_1e^{-400t}+A_2e^{-\frac{16667}{\alpha}t}-\alpha 4\cdot 10^{-2}A_1e^{-400t}-1.667A_2e^{-\frac{16667}{\alpha}t}\approx$$

$$\approx 100+A_1e^{-400t}-0.667A_2e^{-\frac{16667}{\alpha}t}.$$

Для визначення сталих інтегрування треба у виразах (8) та (9) підставити замість змінної t значення початкового моменту часу $t=0_+\approx\alpha_1$ (початковий моменту часу позначається символом α_1, оскільки за своєю фізичною природою відрізняється від опору $r_2=\alpha$).

При цьому виникає невизначеність $e^{-16667\frac{\alpha_1}{\alpha}}$.

Співвідношення нескінченно малих чисел α та α_1 неможливо встановити суто математичним шляхом, оскільки вони відносяться до *різнорідних* параметрів. Проаналізуємо їх з фізичної точки зору. Нагадаємо, що α_1 – це *початковий моменту часу*, а α – це *активна провідність ідеальної ємності*, яку ми спеціально вводимо для виконання стандартних законів комутації. Оскільки ці величини є *незалежними* одна від одної, то *завжди* можна вибрати їх так, щоб забезпечити умову $\alpha_1\approx\alpha^2$. Таким чином можна записати

$$e^{-16667\frac{\alpha_1}{\alpha}}=e^{-16667\frac{\alpha^2}{\alpha}}=e^{-16667\alpha}\approx 1, \quad (11)$$

Враховуючи (8), (9) та (10) отримаємо систему рівнянь для визначення сталих інтегрування

$$u_{C_2}(0_+)=100+A_1e^{-400\alpha_1}+A_2e^{-\frac{16667}{\alpha}\alpha_1}\approx 100+A_1+A_2=0,$$

$$u_{C_3}(0+)=100+A_1e^{-400\alpha_1}-0.667A_2e^{-\frac{16667}{\alpha}\alpha_1}\approx 100+A_1-0.667A_2=100.$$

З першого рівняння визначимо A_2 та підставимо в друге

$$A_2 = -100 - A_1,$$

$$100 + A_1 - 0.667(-100 - A_1) = 100,$$

Звідси

$$1.667 A_1 = -66.7$$

і

$$A_1 = \frac{-66.7}{1.667} = -40,$$

а

$$A_2 = -60.$$

Таким чином

$$u_{C_2}(t) = 100 - 40e^{-400t} - 60e^{-\frac{16667}{\alpha}t} \text{ В, (12)}$$

$$u_{C_3}(t) = 100 - 40e^{-400t} + 40e^{-\frac{16667}{\alpha}t} \text{ В. (13)}$$

Оскільки $e^{-\frac{16667}{\alpha}t} = \alpha$,можна записати

$$\forall(t > 0 \wedge t \neq 0_+) u_{C_2}(t) = 100 - 40e^{-400t} - 60e^{-\frac{16667}{\alpha}t} \approx$$
$$\approx 100 - 40e^{-400t} - 60\alpha \approx 100 - 40e^{-400t},$$

$$\forall(t > 0 \wedge t \neq 0_+) u_{C_3}(t) = 100 - 40e^{-400t} + 40e^{-\frac{16667}{\alpha}t} \approx$$
$$\approx 100 - 40e^{-400t} + 40\alpha \approx 100 - 40e^{-400t}.$$

Висновки

1. Авторами вперше виділено клас нестандартних електротехнічних задач, спрямованих на аналіз перехідних процесів в електричних колах постійного струмуз порушенням законів комутації. Показано, що розв'язок виділеного класу задач стандартними методами теоретичної електротехніки є занадто складним.

2. Для вирішення окресленої проблеми запропоновано поширити методи нестандартного аналізу на такі задачі завдяки тому, що у вітці з ємністю

додається нескінченно малий опір. Переваги такого підходу підтверджені в наведеному прикладі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кацив С. Ш., Кухарчук В. В., Мадьяров В. Г. Нестандартний аналіз в математиці: обчислення похідних // The 5 th International scientific and practical conference "Topical aspects of modern scientific research" (January 25-27, 2024) CPN Publishing Group, Tokyo, Japan. 2024. – С.261 – 267
2. Кухарчук В. В., Кацив С. Ш., Мадьяров В. Г. Нестандартний аналіз в електротехніці: коло з ідеальними індуктивностями, у яких активні опори є нескінченно малими числами // The 6 th International scientific and practical conference "Modern research in science and education" (February 8 -10, 2024) BoScience Publisher, Chicago, USA. 2024. – С.161 – 169
3. Мадьяров В. Г., Кацив С. Ш., Кухарчук В. В. Нестандартний аналіз в електротехніці: складне коло з ідеальними індуктивностями та магнітним зв'язком // The 5 th International scientific and practical conference "Innovative development of science, technology and education" (February 15-17, 2024) Perfect Publishing, Vancouver, Canada. 2024. – С.190 – 197