УДК 621.313

НЕСТАНДАРТНИЙ АНАЛІЗ В ЕЛЕКТРОТЕХНІЦІ: ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА З ІДЕАЛЬНИМИ ІНДУКТИВНОСТЯМИ, У ЯКИХ АКТИВНІ ОПОРИ Є НЕСКІНЧЕННО МАЛИМИ ЧИСЛАМИ

Кухарчук Василь Васильович
д.т.н., професор
Кацив Самоїл Шулімович
к.т.н., доцент
Мадьяров Вячеслав Губейович
к.т.н., доцент
Вінницький національний технічний університет
м. Вінниця, Україна

Анотація. В роботі отримали розвиток ідеї та методи нестандартного аналізу в галузі теоретичної електротехніки. Розглянуто аналіз кола постійного струму з ідеальними індуктивностями, у якого активні опори є нескінченно малими числами різного порядку.

Ключові слова: нескінченно мале число, нескінченно велике число, гіпердійсне число, нестандартне число, стандартне число, електричне коло, ідеальний індуктивний елемент.

Вступ

При розв’язанні різноманітних наукових та технічних задач час від часу дослідник зустрічається з необхідністю розкриття невизначеностей типу $\frac{0}{0}$. При цьому досить часто застосування класичних методів викликає певні ускладнення. В цих випадках набагато зручнішим є використання ідей та методів *нестандартного аналізу*, який дозволяє безпосереднє використання нескінченно малих чисел.

Цікаво, що за допомогою такого використання Лейбніц та Ньютон побудували засади диференційного та інтегрального обчислень. На жаль пізніше математики відмовились від таких методів і в основу математичного апарату диференційного та інтегрального обчислення були покладені числові та функціональні послідовності і граничні співвідношення величин. Це підвищило аксіоматичну строгість математичного апарату, але, на жаль, ускладнило розв'язання певного кола електротехнічних задач.

Відродження ідей нестандартного аналізу відбулося в 60-х роках минулого сторіччя, коли А. Робінсон запропонував нову аксіоматику математичного аналізу, яка базується на множині *гіпердійсних* чисел, що містить окрім так званих *стандартних* (звичайних дійсних) чисел ще й так звані *нестандартні* (нескінченно малі, нескінченно великі та їх комбінації зі звичайними дійсними) числа [1].

Нагадаємо аксіоматику нестандартного аналізу [2, 3].

Нехай R – впорядкована множина дійсних чисел. Число α будемо називати *нескінченно малим числом* тоді та лише тоді, коли

$$\forall r \in R(\alpha < r). \qquad (1)$$

Число $\beta = \dfrac{1}{\alpha}$ будемо називати *нескінченно великим числом*. В цьому випадку можна записати

$$\forall r \in R(\beta > r). \qquad (2)$$

До нескінченно малих та великих чисел можуть бути застосовані всі алгебраїчні операції (додавання, віднімання, множення, ділення, зведення в ступінь тощо) та теореми (комутативності, асоціативності тощо).

Будемо розрізняти нескінченно малі та великі числа різного порядку:

- $\alpha > \alpha^2 > \alpha^3 > \alpha^k$ – нескінченно малі числа першого, другого, третього, k-го порядку;
- $\beta < \beta^2 < \beta^3 < \beta^k$ – нескінченно великі числа першого, другого, третього, k-го порядку.

Разом з дійсними числами $r \in R$ нескінченно малі та великі числа утворюють впорядковану множину *гіпердійсних* чисел $*R$. Прийнято називати дійсні числа $r \in R$ *стандартними* або *архімедовими* на відміну від *нестандартних* (*неархімедових*) чисел $*r \in *R$.

Кожне нестандартне число містить стандартну частину

$$*r = r \pm \alpha, \qquad (3)$$

тобто

$$r = st(*r), \qquad (4)$$

інакше кажучи звичайне дійсне число є стандартною частиною деякого нестандартного числа (очевидно, таких чисел може бути нескінченна кількість).

Два стандартних числа a та b називаються рівними тоді та лише тоді коли

$$a - b = 0. \qquad (5)$$

Два нестандартних числа $*a$ та $*b$ називаються *еквівалентними* (або *нескінченно близькими* одне до одного) тоді та лише тоді коли

$$*a - *b \approx \alpha. \qquad (6)$$

Позначення $\approx$ буде означати еквівалентність двох нестандартних чисел.

Для стандартних чисел m та n запишемо основні співвідношення, які випливають з (1 – 6):

$$\frac{1}{\alpha^k} = \beta^k,\ \frac{m}{\alpha^k} = m\beta^k,\ \frac{m\alpha}{n\alpha} = \frac{m}{n},\ \frac{m\alpha}{n} = \frac{m}{n}\alpha,\ \frac{m}{n\alpha} = \frac{m}{n}\beta, \qquad (7)$$

$$m\alpha + n \approx n,\ m\beta + n \approx m\beta,\ m\alpha^k + n \approx n,\ m\beta^k + n \approx m\beta^k. \ (8)$$

Цілком природно, що таку ж нестандартну структуру може мати не лише множина дійсних чисел, а і множина уявних чисел, тобто площина комплексних чисел

$$m\alpha + jn \approx jn,\ m\beta + jn \approx m\beta,.\ m + jn\alpha \approx m,\ m + jn\beta \approx jn\beta. \ (9)$$

В даній роботі розглянемо застосування нестандартного аналізу в електротехніці.

Для аналізу електричних кіл постійного струму використовуються різноманітні уніфіковані методи розрахунку, які базуються на законах Ома та Кірхгофа. Разом з тим, існує велике коло задач цього напрямку, для яких безпосереднє використання цих уніфікованих методів практично неможливе.

Це стосується розрахунку кіл постійного струму з ідеальними реактивними елементами. Складність розрахунків в таких колах полягає в тому, що на постійному струмі опір ідеальної індуктивності ($x_L = \omega L$) прямує до нуля, а опір ідеальної ємності ($x_C = \dfrac{1}{\omega C}$) – до нескінченності.

Зазвичай, для розв'язання таких задач одночасно із законами електротехніки використовують енергетичні характеристики індуктивностей та ємностей, що значно ускладнює аналіз таких кіл, особливо для складних схем. Тому актуальним є застосування математичного апарату *нестандартного аналізу*, який дозволить використати відомі уніфіковані методи для розрахунку таких кіл.

Перед тим, як перейти до застосування виразів (1 – 9) для розв'язання різноманітних прикладних задач зазначимо, що не існує загальних правил вибору параметру, який доцільно прирівняти до нескінченно малого (або нескінченно великого) числа. Цей вибір здійснюється дослідником в залежності від контексту конкретної задачі. При цьому слід мати на увазі, що у випадку необхідності заміни нескінченно малими числами одразу кількох різнорідних параметрів однієї задачі, визначення співвідношень між цими числами є зовсім непростою проблемою і вимагає, іноді, додаткових досліджень. Саме такий випадок ми і розглянемо.

Аналіз кіл постійного струму з різнорідними параметрами, що заміняються нескінченно малими числами

Розглянемо коло постійного струму, яке наведене на рис. 1.

Це коло будемо вважати колом з ідеальними індуктивностями, якщо опори r_1, r_2 будуть нескінченно малими числами, тобто $r_1 \approx \alpha_1$, $r_2 \approx \alpha_2$.

Таким чином, при розв'язанні цієї задачі необхідно враховувати три *різних* нескінченно малих числа $\omega \approx \alpha$, $r_1 \approx \alpha_1$, $r_2 \approx \alpha_2$, співвідношення порядків яких заздалегідь невідоме.

Проаналізуємо можливі варіанти співвідношень порядків між цими різними нескінченно малими числами. При цьому є сенс вважати, що опори r_1,

r_2 є нескінченно малими числами одного порядку.

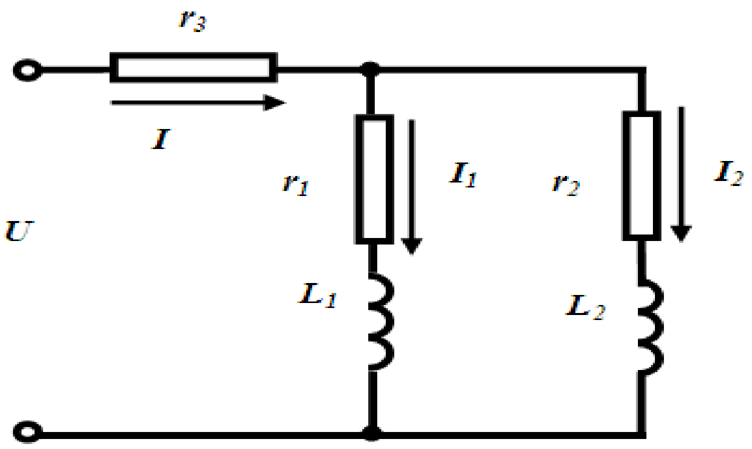

Рисунок 1 – Коло з ідеальними індуктивностями

Варіант 1. Порядок частоти постійного струму ω дорівнює порядку опорів r_1, r_2, тобто

$$\alpha \approx \alpha_1 \approx \alpha_2.$$

Варіант 2. Порядок частоти постійного струму ω більше ніж порядок опорів r_1, r_2, тобто

$$\alpha < (\alpha_1 \approx \alpha_2).$$

Варіант 3. Порядок частоти постійного струму ω менше ніж порядок опорів r_1, r_2, тобто

$$\alpha > (\alpha_1 \approx \alpha_2).$$

Визначимо струми у вітках кола для кожного із вищенаведених варіантів.

Варіант 1.

В загальному вигляді можна записати

$$\alpha_1 \approx m\alpha, \; \alpha_2 \approx n\alpha,$$

де m, n – довільні стандартні числа (зокрема 1).

Тоді для повних комплексних опорів віток кола (рис. 1) можна записати

$$\underline{Z}_1 = r_1 + j\omega L_1 = \alpha_1 + j\alpha L_1 = m\alpha + j\alpha L_1 = \alpha(m + jL_1),$$

$$\underline{Z}_2 = r_2 + j\omega L_2 = \alpha_2 + j\alpha L_2 = n\alpha + j\alpha L_2 = \alpha(n + jL_2),$$

$$\underline{Z}_3 = r_3.$$

Повний комплексний опір кола дорівнює

$$\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = r_3 + \frac{\alpha(m + jL_1)\alpha(n + jL_2)}{\alpha(m + jL_1) + \alpha(n + jL_2)} =$$

$$= r_3 + \frac{\alpha(m + jL_1)(n + jL_2)}{m + n + j(L_1 + L_2)} \approx r_3.$$

Звідси $\underline{I} = \dfrac{U}{r_3}$, напруга на паралельних вітках $\underline{Z}_1$ та $\underline{Z}_2$

$$\underline{U}_Z = \underline{I}\,\frac{\alpha(m + jL_1)(n + jL_2)}{m + n + j(L_1 + L_2)} = \frac{U}{r}\,\frac{\alpha(m + jL_1)(n + jL_2)}{m + n + j(L_1 + L_2)},$$

а струми у вітках

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_Z}{\underline{Z}_1} = \frac{\dfrac{U}{r}\,\dfrac{\alpha(m + jL_1)(n + jL_2)}{m + n + j(L_1 + L_2)}}{\alpha(m + jL_1)} = \frac{U(n + jL_2)}{r[m + n + j(L_1 + L_2)]},$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_Z}{\underline{Z}_2} = \frac{\dfrac{U}{r}\,\dfrac{\alpha(m + jL_1)(n + jL_2)}{m + n + j(L_1 + L_2)}}{\alpha(n + jL_2)} = \frac{U(m + jL_1)}{r[m + n + j(L_1 + L_2)]}.$$

Легко помітити, що в першому варіанті, незважаючи на постійну напругу, струми в індуктивностях є комплексними величинами.

Варіант 2.

В загальному вигляді можна записати

$$\alpha \approx m\alpha_1^k,\ \alpha_2 \approx n\alpha_1,$$

де m, n – довільні стандартні числа (зокрема 1).

Тоді для повних комплексних опорів віток кола (рис. 1) можна записати

$$\underline{Z}_1 = r_1 + j\omega L_1 = \alpha_1 + j\alpha L_1 = \alpha_1 + jm\alpha_1^k L_1,$$

$$\underline{Z}_2 = r_2 + j\omega L_2 = \alpha_2 + j\alpha L_2 = n\alpha_1 + jm\alpha_1^k L_2,$$

$$\underline{Z}_3 = r_3.$$

Повний комплексний опір кола дорівнює

$$\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = r_3 + \frac{\left(\alpha_1 + jm\alpha_1^k L_1\right)\left(n\alpha_1 + jm\alpha_1^k L_2\right)}{\alpha_1 + jm\alpha_1^k L_1 + n\alpha_1 + jm\alpha_1^k L_2} =$$

$$= r_3 + \frac{\left(\alpha_1 + jm\alpha_1^k L_1\right)\left(n + jm\alpha_1^{k-1} L_2\right)}{1 + jm\alpha_1^{k-1} L_1 + n + jm\alpha_1^{k-1} L_2} =$$

$$= r_3 + \frac{\left(\alpha_1 + jm\alpha_1^k L_1\right)\left(n + jm\alpha_1^{k-1} L_2\right)}{n + 1 + jm\alpha_1^{k-1}\left(L_1 + L_2\right)} \approx r_3.$$

Звідси $\underline{I} = \dfrac{U}{r_3}$, напруга на паралельних вітках $\underline{Z}_1$ та $\underline{Z}_2$

$$\underline{U}_Z = \underline{I}\,\frac{\left(\alpha_1 + jm\alpha_1^k L_1\right)\left(n + jm\alpha_1^{k-1} L_2\right)}{n + 1 + jm\alpha_1^{k-1}\left(L_1 + L_2\right)} =$$

$$= \frac{U}{r}\,\frac{\left(\alpha_1 + jm\alpha_1^k L_1\right)\left(n + jm\alpha_1^{k-1} L_2\right)}{n + 1 + jm\alpha_1^{k-1}\left(L_1 + L_2\right)},$$

а струми у вітках

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_Z}{\underline{Z}_1} = \frac{\dfrac{U}{r}\,\dfrac{\left(\alpha_1 + jm\alpha_1^k L_1\right)\left(n + jm\alpha_1^{k-1} L_2\right)}{n + 1 + jm\alpha_1^{k-1}\left(L_1 + L_2\right)}}{\left(\alpha_1 + jm\alpha_1^k L_1\right)} =$$

$$= \frac{U\left(n + jm\alpha_1^{k-1} L_2\right)}{r\left[n + 1 + jm\alpha_1^{k-1}\left(L_1 + L_2\right)\right]} \approx \frac{Un}{r(n+1)},$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_Z}{\underline{Z}_2} = \frac{\dfrac{U}{r}\,\dfrac{\left(\alpha_1 + jm\alpha_1^k L_1\right)\left(n + jm\alpha_1^{k-1} L_2\right)}{n + 1 + jm\alpha_1^{k-1}\left(L_1 + L_2\right)}}{n\alpha_1 + jm\alpha_1^k L_2} =$$

$$= \frac{U}{r}\,\frac{\left(1 + jm\alpha_1^{k-1} L_1\right)}{n + 1 + jm\alpha_1^{k-1}\left(L_1 + L_2\right)} \approx \frac{U}{r(n+1)}.$$

Зазначимо, що в другому варіанті струми в індуктивностях не залежать від значень самих індуктивностей.

Варіант 3.

В загальному вигляді можна записати

$$\alpha_1 \approx m\alpha^k,\ \alpha_2 \approx n\alpha^k,$$

де m, n – довільні стандартні числа (зокрема 1).

Тоді для повних комплексних опорів віток кола (рис. 1) можна записати

$$\underline{Z}_1 = r_1 + j\omega L_1 = \alpha_1 + j\alpha L_1 = m\alpha^k + j\alpha L_1 = \alpha\left(m\alpha^{k-1} + jL_1\right),$$

$$\underline{Z}_2 = r_2 + j\omega L_2 = \alpha_2 + j\alpha L_2 = n\alpha^k + j\alpha L_2 = \alpha\left(n\alpha^{k-1} + jL_2\right),$$

$$\underline{Z}_3 = r_3.$$

Повний комплексний опір кола дорівнює

$$\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = r_3 + \frac{\alpha\left(m\alpha^{k-1} + jL_1\right)\alpha\left(n\alpha^{k-1} + jL_2\right)}{\alpha\left(m\alpha^{k-1} + jL_1\right) + \alpha\left(n\alpha^{k-1} + jL_2\right)} =$$

$$= r_3 + \frac{\alpha\left(m\alpha^{k-1} + jL_1\right)\left(n\alpha^{k-1} + jL_2\right)}{(m+n)\alpha^{k-1} + j\left(L_1 + L_2\right)} \approx r_3.$$

Звідси $\underline{I} = \dfrac{U}{r_3}$, напруга на паралельних вітках $\underline{Z}_1$ та $\underline{Z}_2$

$$\underline{U}_Z = \underline{I}\,\frac{\alpha\left(m\alpha^{k-1} + jL_1\right)\left(n\alpha^{k-1} + jL_2\right)}{(m+n)\alpha^{k-1} + j\left(L_1 + L_2\right)} = \frac{U}{r}\,\frac{\alpha\left(m\alpha^{k-1} + jL_1\right)\left(n\alpha^{k-1} + jL_2\right)}{(m+n)\alpha^{k-1} + j\left(L_1 + L_2\right)},$$

а струми у вітках

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_Z}{\underline{Z}_1} = \frac{\dfrac{U}{r}\,\dfrac{\alpha\left(m\alpha^{k-1} + jL_1\right)\left(n\alpha^{k-1} + jL_2\right)}{(m+n)\alpha^{k-1} + j\left(L_1 + L_2\right)}}{\alpha\left(m\alpha^{k-1} + jL_1\right)} =$$

$$= \frac{U\left(n\alpha^{k-1} + jL_2\right)}{r\left[(m+n)\alpha^{k-1} + j\left(L_1 + L_2\right)\right]} \approx \frac{UL_2}{r\left(L_1 + L_2\right)},$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_Z}{\underline{Z}_2} = \frac{\dfrac{U}{r}\,\dfrac{\alpha\left(m\alpha^{k-1} + jL_1\right)\left(n\alpha^{k-1} + jL_2\right)}{(m+n)\alpha^{k-1} + j\left(L_1 + L_2\right)}}{\alpha\left(n\alpha^{k-1} + jL_2\right)} =$$

$$= \frac{U\left(m\alpha^{k-1} + jL_1\right)}{r\left[(m+n)\alpha^{k-1} + j\left(L_1 + L_2\right)\right]} \approx \frac{UL_1}{r\left(L_1 + L_2\right)}.$$

В третьому варіанті струми в індуктивностях залежать лише від значень самих індуктивностей. Саме цей варіант концептуально відповідає задачам, які зустрічаються в практиці викладання теорії електричних кіл. Тому, надалі, будемо вважати, що співвідношення порядків між різними нескінченно малими числами відповідають третьому варіанту.

Висновки

1. Авторами вперше виділено клас нестандартних електротехнічних

задач, спрямованих на аналіз електричних кіл постійного струму, до складу яких входять ідеальні індуктивності. Показано, що розв’язок виділеного класу задач стандартними методами теоретичної електротехніки є занадто складним або взагалі практично неможливим.

2. Для вирішення окресленої проблеми запропоновано поширити методи нестандартного аналізу на задачі аналізу електричних кіл з ідеальними реактивними елементами. Переваги такого підходу підтверджені на прикладі розрахунку електричного кола з індуктивностями.

3. У випадку необхідності заміни нескінченно малими числами одразу кількох різнорідних параметрів однієї задачі, визначення співвідношень між цими числами є зовсім непростою проблемою і вимагає додаткових досліджень.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Robinson A. Non-Standard Analysis / A. Robinson. Princeton: Princeton Univ. Press. — 1996. — 308 pp.
2. S. Katsyv. Nonstandard analysis in electrical engineering. The analysis of the direct current circles with ideal reactive elements. / S. Katsyv, V. Kukharchuk, V. Kucheruk, P. Kulakov, M. Gribov // Bulletin of the Karaganda University. «Physics series.» – № 1(109) – 2023 – P. 31-39
3. Кацив С. Ш., Кухарчук В.В., Мадьяров В. Г. Нестандартний аналіз в електротехніці: складні кола постійного струму з ідеальними індуктивностями – тези доп. International scientific conference FEATURES OF INNOVATIVE DEVELOPMENT IN THE FIELD OF TECHNOLOGY: THE COMPARATIVE EXPERIENCE OF UKRAINE AND THE EUROPEAN UNION August 5–6, 2022, Włocławek, the Republic of Poland, 2022 P. 38 - 41.