УДК 517:517.9

Павленко І.В., д-р техн. наук, професор,
ORCID 0000–0002–6136–1040
Яковчук В.В.,
Сумський державний університет,

ПЕРСПЕКТИВИ ЗАСТОСУВАННЯ ФРАКЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ В ОБЧИСЛЮВАЛЬНІЙ ГІДРОДИНАМІЦІ

Обчислювальна гідродинаміка традиційно ґрунтується на фундаментальних законах перенесення маси, імпульсу та енергії у континуальних середовищах. Відповідні диференціальні рівняння передбачають миттєву реакцію системи на зовнішні впливи. Проте у багатьох реальних середовищах (пористі матеріали, в'язкопластичні полімерні середовища, біологічні рідини, турбулентні потоки з масштабною взаємодією) спостерігається аномальна дифузія та ефекти пам'яті, які класичні моделі не здатні відтворити, оскільки не враховують сили фракційної природи, фрактальну розмірність середовища та інші чинники.

Водночас фракційні похідні дозволяють виявляти ефекти пам'яті, дисипації, в'язко-інерційної спадковості та аномальної дифузії при моделюванні потоку. За такого підходу замість класичних операторів $\frac{d}{dt}$, $\frac{\partial}{\partial t}$ та ∇^2 вводяться відповідні фракційні оператори ${}^{C}D_t^{\beta}$, $\frac{\partial^{\beta}}{\partial^{\beta} t}$ та ∇^{α}, а система рівнянь руху набуває такого вигляду:

$$\rho\ {}^{C}D_t^{\beta}\boldsymbol{u} = -\nabla p + \mu_{\alpha} D^{\alpha}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}, \tag{1}$$

де t – час; u – вектор швидкості; p – тиск; ρ_{β}, μ_{α} – фракційні густина і в'язкість; f – головний вектор питомих зовнішніх масових сил; C – стала масштабування похідної Капуто ${}^{C}D_t^{\beta}$.

При цьому, для урахування мультифізичних процесів, наприклад, з урахуванням теплопередачі та масообміну, класичні закони Фур'є та Фіка записуються у фракційний формі:

$$\frac{\partial^{\alpha} T}{\partial t^{\alpha}} = k_{\beta}\nabla^{\beta} T, \tag{2}$$

де τ – час релаксації; T – температура; k_{β} – фракційний коефіцієнт теплопровідності;

$$\frac{\partial^\alpha C}{\partial t^\alpha} = D_\beta \nabla^\beta C, \qquad (3)$$

де C – концентрація; D_β – фракційний коефіцієнт дифузії.

Подібні моделі застосовуються при моделюванні турбулентних потоків [1], в'язкопружних потоків [2] та потоків у пористих середовищах [3]. Це дає змогу моделювати процеси турбулентного теплообміну, аномальної суб- та супердифузії [4], які спостерігаються у біологічних матеріалах, осадження частинок у пористих середовищах [5] тощо. Вони містять дробові похідні, вперше введені Лейбніцем у 1695 р. та розвинені значно пізніше до форми Капуто, Грюнвальда–Летнікова та ін. Наприклад, принципи моделюванні двофазних потоків з урахування спадкової сил Бассе–Буссінеска–Озеена суттєво розширилися завдяки застосуванню фракційної похідної Рімана–Ліувілля [6, 7]:

$$D^\alpha \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\lceil\alpha\rceil-\alpha)} \frac{d^{\lceil\alpha\rceil}}{dt^{\lceil\alpha\rceil}} \int_0^t (t-\theta)^{n-\alpha-1} \varphi(\theta) d\theta, \qquad (4)$$

де $\varphi(t)$ – задана функція; $\Gamma(n)$ – гамма-функція Ейлера; θ – незалежний параметр.

За такого підходу досліджуються потоки, що описуються не лише локальними похідними, як у системі рівнянь Нав'є–Стокса, а й нелокальними взаємодіями між точками потоку. Це дозволяє врахувати ефекти пам'яті та довготривалої кореляції руху.

Для прикладу, розгляд стаціонарного ламінарного потоку Куетта–Пуазейля у двовимірній постановці:

$$\mu\ (d^2\ u)/(dy^2\ ) = dp/dx. \qquad (5)$$

Для граничних умов $u(0) = 0$, $u(h) = u_w$ призводить до параболічного профілю швидкості по ширині плоского каналу:

$$u(y) = u_w\ y/h + 1/2\mu\ \ dp/dx\ (y^2 - hy), \qquad (6)$$

де x, y – поздовжня і поперечна координати; u – проєкція швидкості на вісь x; u_w – швидкість рухомої стінки; h – ширина каналу; $dp/dx \approx \Delta p/l < 0$ – поздовжній градієнт тиску; Δp – перепад тиску по довжині l плоского каналу.

Водночас, за фракційного підходу, коли друга похідна замінюється оператором D_y^α порядку α $(1 < \alpha \le 2)$

$$\mu_\alpha D_y^\alpha u(y) = dp/dx, \qquad (7)$$

профіль стає більш плоским у ядрі потоку та додає асиметрію, зміщуючи максимум до однієї зі стінок (рисунок 1), що відповідає субдифузії імпульсу через товщину шару (аномальна, нелокальна передача імпульсу), коли рідина «пам’ятає» попередні стани:

$$u(y) = u_{\text{w}}\,(y/h)^{(\alpha-1)} + 1/(\mu_{\alpha}\,\Gamma(\alpha+1))\ dp/dx\,(y^{\alpha} - hy^{(\alpha-1)}). \tag{8}$$

Варто зазначити, що розв’язок (6) є окремим, стандартним випадком розв’язку Куетта–Пуазейля, отже фракційний вираз (8) коректно відтворює класичний випадок при $\alpha = 2$.

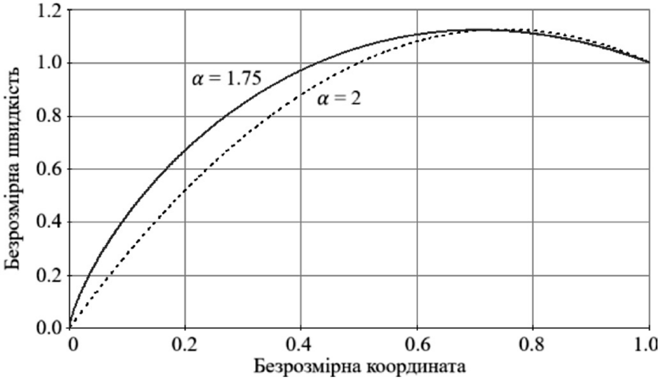

Рисунок 1 – Профілі швидкості

Таким чином, впровадження фракційного числення основними перевагами застосування фракційного числення [8, 9] в обчислювальну гідродинаміку відкриває нові можливості для удосконалення моделей, що описують перехідні процеси, релаксаційні явища та багатомасштабну динаміку потоків.

Список використаних джерел

1. Song F., Karniadakis G. E. Variable–order fractional models for wall–bouded turbulent flows. Entropy 2021, Vol. 23(6), 782.

2, Javaid M., Chauhdary J. N., Javaid M. Y., Farooq M., Saleem F., Imran M., Hussain I., Sultan M., Khan I., Khan M. I., Rehan M., Riaz F. Channel flow dynamics of fractional viscoelastic nanofluids in molybdenum disulphide grease: A case study. Results in Engineering 2024, Vol. 24, 102872.

3. Pavlenko I., Ochowiak M., Włodarczak S., Krupińska A., Matuszak M. Parameter identification of the fractional–order mathematical model for convective mass transfer in a porous medium. Membranes 2023, Vol. 13(10), 819.

4.Čukić M., Galovic S. Mathematical modeling of anomalous diffusive behavior in transdermal drug–delivery including time–delayed flux concept. Chaos, Solitons and Fractals 2023, Vol. 172, 113584.

5. Pavlenko I., Ochowiak M., Agarwal P., Olszewski R., Michałek B., Krupińska A. Improvement of mathematical model for sedimentation process. Energies 2021, Vol. 14(15), 4561.

6. Павленко І.В. Науково-теоретичні основи вібраційних процесів у гетерогенних системах : дис. на здобуття наукового ступеня д-ра техн. наук : 05.17.08. – Суми : Сумський державний університет, 2020. – 476 с.

7. Бага ВМ. Наукові основи гідромеханічних процесів абразивоструменевого оброблення поверхонь: дис. на здобуття наукового ступеня д-ра техн. наук : 05.05.17. – Харків : Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», 2025.– 423 с.

8. Pavlenko I., Yakovchuk V., Pavlenko V., Ciszak O. (2024). On determination of derivatives of the Mittag–Leffler function. In: XI Conference «Modern Technologies in Industrial Production», April 23–26, Sumy, Ukraine, 2024, pp. 167–168.

9. Павленко І.В. Про одну асимптотичну властивість функції Міттаг–Леффлера / І. В. Павленко // Сучасні технології у промисловому виробництві: матеріали та програма X Всеукраїнської науково-технічної конференції (м. Суми, 18–21 квітня 2023 р.) / редколегія: О.Г. Гусак, І. В. Павленко. – Суми : Сумський державний університет, 2023. – 283 с. – С. 130–131.

Дослідження здійснюється у межах діяльності наукової школи «Розроблення гібридних методів параметричної ідентифікації гідромеханічних систем» на виконання завдань перспективного плану розвитку наукового напряму «Технічні науки» Сумського державного університету (держреєстрація № 0121U112684).