УДК № 372.8:378.02.

З. В. Бондаренко

ЯКІСНИЙ АНАЛІЗ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ЯК ЗАСІБ ФОРМУВАННЯ ДЕЯКИХ КОМПОНЕНТІВ ПРОФЕСІЙНОЇ КУЛЬТУРИ СТУДЕНТІВ

Математика для студента є одним із засобів досягнення мети у його професійній діяльності. Оволодіння математичними знаннями є технологією, як і будь-яка інша діяльність людини. На основі сучасних психологічних теорій навчання, методика організації й управління навчально-пізнавальною діяльністю студентів під час вивчення курсу вищої математики виділяє три основних її етапи:

— формування математичних понять;

— навчання доведенню математичних тверджень;

— навчання розв'язуванню задач.

Зміст останнього етапу в технічному ВНЗ полягає у застосуванні математичних знань до розв'язування задач професійної спрямованості, а також реалізації такої організації діяльності, коли фахові знання будуються на взаємозв'язку математики і дисциплін, які забезпечують підготовку фахівця, тобто розв'язуванні задач, орієнтованих на моделі загальнотехнічних дисциплін. Така організація діяльності може бути впроваджена там, де вже в певній мірі сформована професійна культура студента. Аналіз літератури з психолого-педагогічних основ формування професіональної культури особистості показав, що це багаторівневий процес, який складається із різних стадій [1, с. 36].

Традиційний тип професійного становлення культури особистості схематично можна представити так [6, с. 42]:

1. Виникнення професіональних намірів і вступ до відповідного навчального закладу.
2. Засвоєння професіональних знань, вмінь, навиків.
3. Професіональна адаптація.
4. Реалізація особистості в праці.

Математика відноситься до фундаментальних дисциплін. Але вивчаючи фундаментальні дисципліни є можливість постійно сприяти професійному становленню культури студентів. Психологопедагогічними основами формування професійної культури майбутніх спеціалістів в процесі навчання є:

— активна діяльність студента по продуктивному засвоєнню знань, вмінь, навиків з даної спеціальності. Вона обумовлена не тільки зусиллям викладача, але і потребами самого студента;

— активне застосування в навчальному процесі методів, та навчання раціональним способам мислення, спрямованих на розвиток творчого та логічного мислення.

Задача цієї статті — висвітлення засобів, які пропонуються до використання на практичних заняттях під час вивчення теми «Системи диференціальних рівнянь» і формують у студентів елементи професійної культури. Професійна культура студентів розглядається як складова професіоналізму сучасного фахівця, яка обумовлена потребами, що задовольняються у діяльності і через діяльність.

Наведемо приклади завдань, які можна запропонувати студентам під час вивчення теми «Системи диференціальних рівнянь». Ця тема є останньою в розділі «Диференціальні рівняння», тому, як показує практика, дуже мало приділяється часу якісному аналізу розв'язків систем. Весь навчальний процес зводиться до вивчення алгоритму знаходження таких розв'язків.

Особливістю наведених нижче завдань є те, що вони призначені для глибшого оволодіння теми за допомогою засобів нових інформаційних технологій навчання.

Завдання 1. Розглядається диференціальне рівняння, що описує закон зміни заряду на обкладинках конденсатора

$$y'' + 2ky' + w^2 x = f(x).$$

Описати характер розв'язків, коли а) $k > w$; б) $k = w$; в) $k < w$. Розглянути випадок, коли зовнішня сила відсутня і дослідити випадок коли зовнішня сила змінюється з часом за законом $f(t) = H\cos vt$, де H — амплітуда; v — частота зовнішньої сили.

Викладач пропонує студентам використати математичний пакет MathCAD для відшукання графічного розв'язку відповідної системи

$$T := 20$$

$$k := 5 \qquad w := 2$$

Given

$$\frac{d}{dt}y0(t) = y1(t) \qquad\qquad y0(0) = 1$$

$$\frac{d}{dt}y1(t) = -w^2 \cdot y0(t) - 2k\,y1(t) \qquad\qquad y1(0) = 1$$

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} := \mathrm{Odesolve}\left[\begin{pmatrix} y0 \\ y1 \end{pmatrix}, t, T\right]$$

У випадку, коли $k \succ w$ розв' язок показаний на рис. 1.

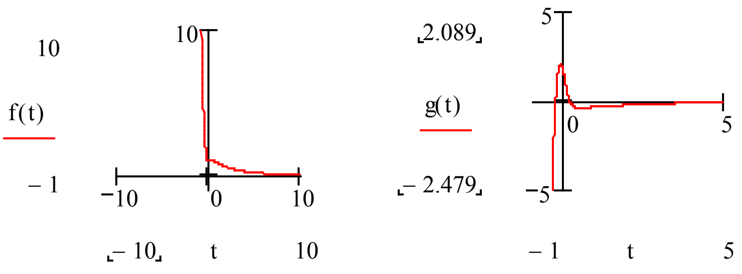

Рис. 1

Студенти можуть зробити висновок, що в цьому випадку коливань не відбувається. Фазовий портрет (рис. 2) вказує на те, що розв'язок системи прямує до нуля, якщо $t \to 0$.

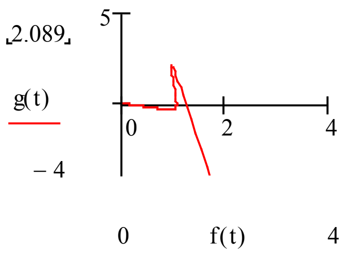

Рис. 2

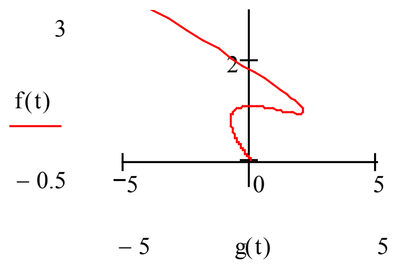

Рис. 3

Змінюючи параметри k, w у вищенаведеній програмі з'ясовується, що у випадку, коли $k = w$ фазовий портрет (рис. 3) має тип виродженого вузла.

Для студентів стає зрозумілим і наочно представленим той факт, що якщо $k < w$, то таке диференціальне рівняння описує коливання, що згасають, коли $t \to \infty$ (рис. 4). А фазовий портрет в цьому випадку має тип фокуса (рис. 5).

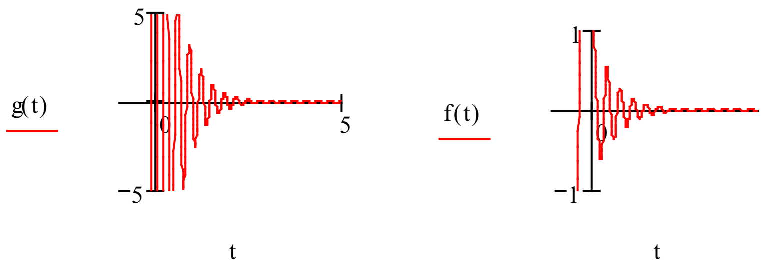

Рис. 4

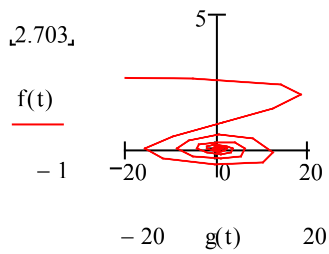

Рис. 5

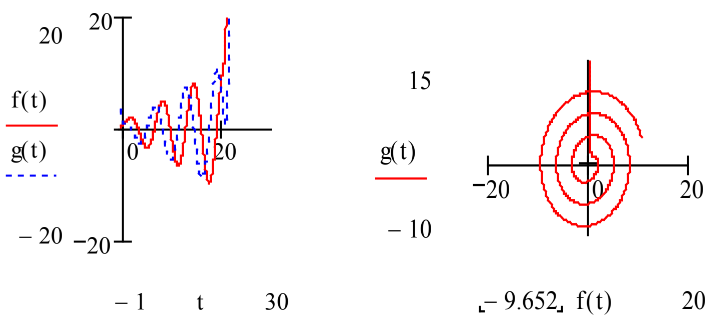

Рис. 6

В результаті спільної діяльності викладача і студентів формулюється поняття резонансу. Викладач пропонує студентам дослідити розв'язок системи вимушених коливань, якщо коефіцієнт тертя досить малий, а частота вимушених коливань наближається до частоти власних коливань системи (рис. 6). Стає зрозумілим, що геометрична модель є геометричним аналогом поняття. Тобто задача була переведена на мову наочної моделі, простішої для сприйняття.

Отримавши аналітичний розв'язок, студенти можуть зробити висновок, що у випадку резонансу відбувається накладання коливань з необмеженою амплітудою і гармонічних коливань. Таким чином відбулось переведення одержаної відповіді з мови наочної моделі на мову вихідної задачі.

Завдання 2. Дослідити на стійкість розв'язок системи

$$\frac{d}{dt}x(t) = -x(t) + z(t); \qquad x(0) = 1;$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = -y(t) - z(t); \qquad y(0) = 1;$$

$$\frac{d}{dt}z(t) = y(t) - z(t); \qquad z(0) = 1.$$

Засобами пакету студенти будують розв'язок системи і фазовий простір (рис. 7).

$$\mathrm{D}(\mathrm{t},\mathrm{Q}) := \begin{pmatrix} -\mathrm{Q}_0 + \mathrm{Q}_2 \\ -\mathrm{Q}_1 - \mathrm{Q}_2 \\ \mathrm{Q}_1 - \mathrm{Q}_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Npts} := 3000$$

$$\mathrm{L} := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, 0, 50, \mathrm{Npts}, \mathrm{D}\right]$$

$$\mathrm{t} := \mathrm{L}^{\langle 0\rangle}$$

$$\mathrm{X} := \mathrm{L}^{\langle 1\rangle} \qquad \mathrm{Y} := \mathrm{L}^{\langle 2\rangle} \qquad \mathrm{Z} := \mathrm{L}^{\langle 3\rangle}$$

$$\mathrm{i} := 0 .. \mathrm{Npts}$$

$$\varepsilon := 0.01$$

$$\mathrm{R}^{\langle 0\rangle} := \mathrm{X} \qquad \mathrm{R}^{\langle 1\rangle} := \mathrm{X} + \varepsilon$$

$$\mathrm{S}^{\langle 0\rangle} := \mathrm{Y} \qquad \mathrm{S}^{\langle 1\rangle} := \mathrm{Y} + \varepsilon$$

$$\mathrm{T}^{\langle 0\rangle} := \mathrm{Z} \qquad \mathrm{T}^{\langle 1\rangle} := \mathrm{Z} + \varepsilon$$

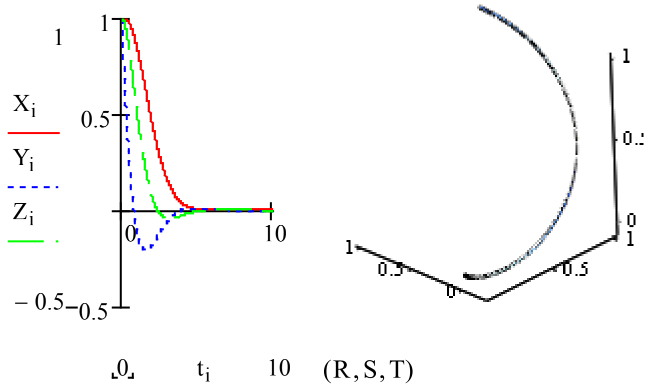

Рис. 7

Знайшовши власні значення системи

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0, \text{ solve}, \quad x \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 1i \cdot 3^{\frac{1}{2}} \\ \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}\cdot 1i \cdot 3^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

можна стверджувати, що розв’язок асимптотично стійкий. Студентам пропонується побудувати фазові портрети по площинах (рис. 8):

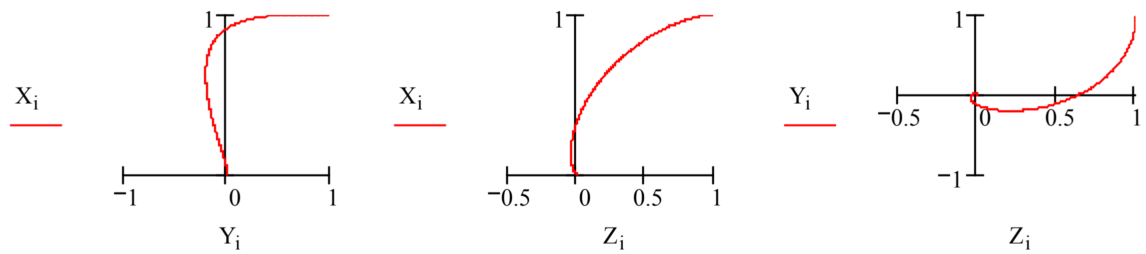

Рис. 8

Стає зрозумілим, що є інваріантна пряма, яка перетинається у початку координат з інваріантною площиною. Існує лінійне перетворення, що відображає інваріантну пряму на вісь *Z*, а інваріантну площину на площину *XY*.

Нами було проведено практичне заняття, на якому ставилась задача дослідження впливу лінійного тертя на поведінку фазових траєкторій консервативної системи. В такому випадку рівняння приймає вигляд

$$\frac{d^2x}{dt} + c\frac{dx}{dt} + k\sin x = 0, \qquad c > 0 \ .$$

На першому етапі студент самостійно готується до виконання роботи. Він сприймає задачу, вивчає теоретичний матеріал, виконує попередні обчислення. Викладач робить постановку задачі, формулює цілі роботи та їх мотивацію. На другому етапі студент вводить результати розрахунків, за допомогою комп'ютера одержує розв'язки рівнянь для різних параметрів. Викладач контролює хід виконання роботи, консультує студентів. Якщо слабке тертя маятника відносно положення рівноваги, вони отримають графік (рис. 9), але, якщо тертя не допускає ніяких коливань, то фазовий портрет міняється (рис. 10).

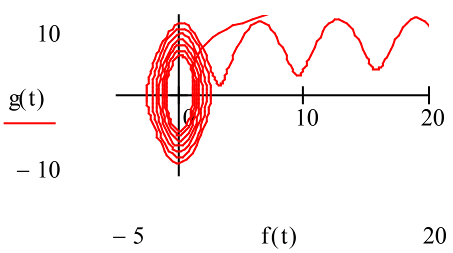

Рис. 9

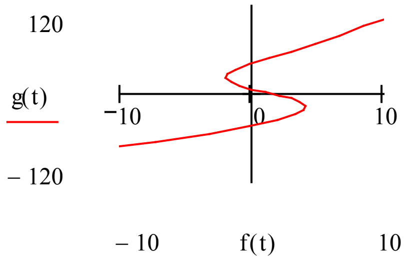

Рис. 10

На третьому етапі проводиться дослідження одержаних розв'язків. Для цього пропонується порівняти фазові портрети консервативної системи (з якими студенти ознайомились на першому етапі) з останніми двома. Викладач допомагає зробити висновок, що замкнуті фазові траєкторії під час слабого тертя переходять в спіралі (особлива точка типу фокус), а під час сильного – в траєкторії, які входять в особливі точки у визначених напрямах (особлива точка типу вузол).

Можна показати, що під час дослідження фазового портрета необхідно розв'язувати систему з різним набором параметрів моделі, щоб подивитись до яких точок збігаються різні траєкторії. Студентам була запропонована система рівнянь

$$\frac{d}{dt}x(t) = 2y(t)z(t) - 5x(t)y(t);$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = by(t)z(t) - 12x(t)z(t) + 32x(t);$$

$$\frac{d}{dt}z(t) = x(t)y(t) + bz(t).$$

Еволюцію фазового портрета студенти спостерігають, проводячи розрахунки з різним параметром b. Для $b = -0{,}1$ (рис. 11), для $b = -20$ (рис. 12).

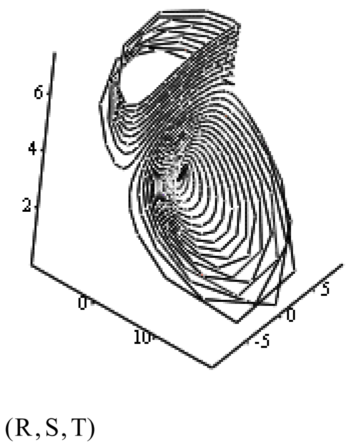

Рис. 11

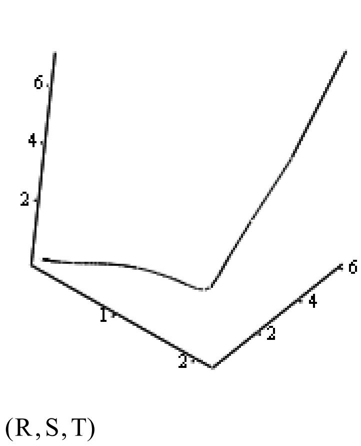

Рис. 12

Як видно з рисунка, траєкторії фазового простору збігаються до різних точок.

Висновки

Проведення практичних занять з використанням нових інформаційних технологій навчання дозволяє значно ефективніше розв'язувати протиріччя між формально-логічним вивченням теми «Системи диференціальних рівнянь» та творчою діяльністю студента шляхом інтенсивного та систематичного впровадження адаптованих до навчального процесу завдань. Отже методичною концепцією побудови моделі професійної культури студентів є наявність задач, в яких відповідні потреби знаходять свій предмет саме у діяльності.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Решетова З. А. Психологические основы профессионального обучения. — М.: МГУ, 1985. — С. 34—46.
2. Хемминг Р. В. Численные методы для научных работников и инженеров: Пер. с англ. Под ред. Р. С. Гутера. Изд. 2-е испр. — М.: Наука, 1972. — С. 26—34.
3. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1986. — С. 56—67.
4. Ляшко І.І., Боярчук О. К., Гай Я. Г., Калайда О. Ф. Диференціальні рівняння — К.: Вища школа, 1987. — С. 43—48.
5. Ісаханов Г. В., Чорний С. М. Чисельні методи розв'язування задач будівництва. — К.: Вища школа, 1995. — С. 126—146.
6. Нечаев Н. Н. Психолого-педагогические аспекты подготовки специалистов в вузе. — М.: Изд-во МГУ, 1985. — 113 с.
7. Краснов М. Л. Обыкновенные диференциальные уравнения. — М.: Высшая школа, 1983. — С. 34—37.
8. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. — М.: Наука, 1985. — С. 78—82.
9. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. — К.: Вища школа, 1992. — 455 с.
10. Амелькин В. В. Диференциальные уравнения в приложениях. — М.: Наука, 1987. — 160 с.

Рекомендована кафедрою вищої математики

Надійшла до редакції 16.07.03
Рекомендована до опублікування 30.09.03

Бондаренко Злата Василівна — асистент кафедри вищої математики
Вінницький національний технічний університет