УДК 62-83

О. І. Толочко, к. т. н., доц.

СИНТЕЗ ПОЛІНОМІВ ДІЇ З УМОВ МОДУЛЬНОГО ОПТИМУМУ ДЛЯ СИСТЕМ З ДЕЯКИМИ СТАНДАРТНИМИ ФОРМАМИ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ ПОЛІНОМІВ

Для підвищення швидкодії систем програмного керування електромеханічними об'єктами за керувальною дією досить часто використовують принцип комбінованого управління, який реалізується за допомогою пристроїв задання з паралельними зв'язками, які здійснюють так звану випереджувальну корекцію [1]. З таким підходом у передаточній функції (ПФ) системи з'являється поліном дії (ПД) з незалежно керованими коефіцієнтами. Існує методика розрахунку коефіцієнтів ПД з умов модульного оптимуму для систем підпорядкованого регулювання [2]. В [3] цю методику розповсюджено на системи модального керування, у яких характеристичний поліном (ХП) сконструйовано, як і в системах підпорядкованого регулювання, методом подвійних пропорцій. Згідно з цією методикою для визначення коефіцієнтів чисельника ПФ

$$K(p_\omega) = k\frac{\beta_m p_\omega^m + \beta_{m-1} p_\omega^{m-1} + \ldots + \beta_1 p_\omega + 1}{p_\omega^n + \alpha_{n-1} p_\omega^{n-1} + \ldots + \alpha_1 p_\omega + 1} = k\frac{H_m(p_\omega)}{G_n(p_\omega)}, \tag{1}$$

де $p_\omega = \Omega_0 p$, Ω_0 — середньо-геометрічний корінь (СГК) характеристичного рівняння, необхідно вирішити систему перших *m* рівнянь, що описують умови модульного оптимуму:

$$\begin{cases} \alpha_1^2 - 2\alpha_2 = \beta_1^2 - 2\beta_2; \\ \alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_4 = \beta_2^2 - 2\beta_1\beta_3 + 2\beta_4; \\ \alpha_3^2 - 2\alpha_2\alpha_4 + 2\alpha_1\alpha_5 - 2\alpha_6 = \beta_3^2 - 2\beta_2\beta_4 + 2\beta_1\beta_5 - 2\beta_6; \\ \ldots \\ \alpha_m^2 - 2\alpha_{m-1}\alpha_{m+1} + \ldots = \beta_m^2. \end{cases} \tag{2}$$

Там же показано, що використовуючи як ХП поліном Баттерворта, розв'язком системи (2) є нульові значення усіх коефіцієнтів β_i, тому що ліві частини всіх рівнянь системи (2) тотожно дорівнюють 0.

Але це не означає, що взагалі не існує ПД, який міг би підвищити швидкодію системи з ХП Баттерворта без суттєвого зростання перерегулювання її перехідної функції.

Для того щоб змінити розв'язання системи (2) досить задатися значенням одного з коефіцієнтів β_i, а інші розрахувати сумісним рішенням (*m* – 1) перших рівнянь системи (2).

Найдоцільніше задавати значення першого коефіцієнта, тому що з заданою величиною СГК різниця $\alpha_1 - \beta_1$ визначає усталену швидкісну похибку системи та її швидкодію.

Логічно припустити, що ця різниця може бути обрана рівною першому коефіцієнту характеристичного полінома ступеня $n - m$:

$$\alpha_{1(n)} - \beta_{1(m,n)} = \alpha_{1(n-m)},$$

звідки

$$\beta_1 = \beta_{1(m,n)} = \alpha_{1(n)} - \alpha_{1(n-m)}. \tag{3}$$

Тоді рівняння (2) з урахуванням властивостей полінома Батерворта набудуть такого вигляду:
а) для $m = 2$

$$\beta_1^2 - 2\beta_2 = 0,$$

звідки

$$\beta_2 = \beta_1^2 / 2; \tag{4}$$

б) для $m = 3$

$$\begin{cases} \beta_1^2 - 2\beta_2 = 0; \\ \beta_2^2 - 2\beta_1\beta_3 = 0, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} \beta_2 = \beta_1^2 / 2; \\ \beta_3 = \beta_2^2 / 2\beta_1 = \beta_1^3 / 8; \end{cases} \tag{5}$$

в) для $m = 4$

$$\begin{cases} \beta_1^2 - 2\beta_2 = 0; \\ \beta_2^2 - 2\beta_1\beta_3 + 2\beta_4 = 0; \\ \beta_3^2 - 2\beta_2\beta_4, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} \beta_2 = \beta_1^2 / 2; \\ \beta_3 = \beta_1^3 (2 - \sqrt{2}) / 4; \\ \beta_4 = \beta_3^2 / 2\beta_2 = \beta_1^4 (3 - 2\sqrt{2}) / 8. \end{cases} \tag{6}$$

Перехідні функції систем шостого-сьомого порядків з описаною вище настройкою показані на рис. 1. З цих графіків видно, що доповнення передаточної функції поліномами дії, синтезованими за наведеними вище формулами, дозволяє підвищити швидкодію системи без погіршення форми перехідної функції. Зі збільшенням порядку полінома дії разом з підвищенням швидкодії спостерігається зниження перерегулювання σ та коливальності перехідних процесів. Якщо треба ще більше зменшити σ, необхідно знижувати значення коефіцієнта β_1 у порівнянні з величиною, отриманою з формули (3).

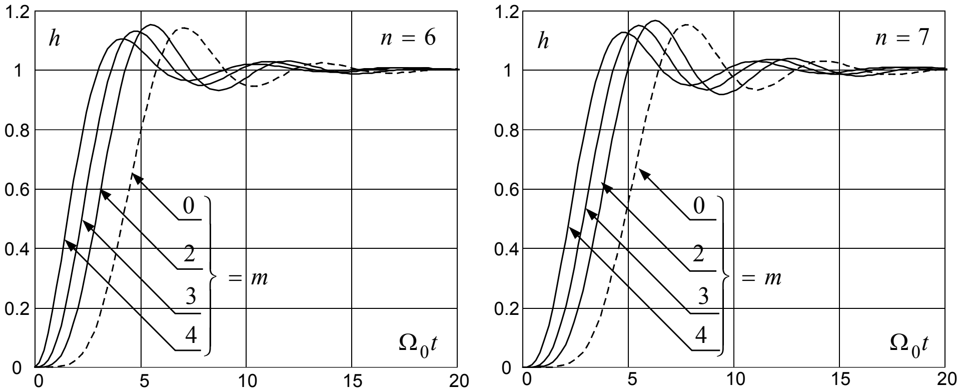


Рис. 1. Перехідні процеси в системах з ХП Баттерворта

Розглянемо можливість застосування умов модульного оптимуму для синтезу полиномів дії у випадках, коли як ХП використовуються деякі інші стандартні поліноми, а не поліном Баттерворта та поліном, сконструйований методом подвійних пропорцій.

По-перше, розглянемо методику, згідно з якою для розрахунку коефіцієнтів ПД *m*-го порядку необхідно розв'язувати *m* перших рівнянь системи (2). Питання полягає у тому, чи буде ця система мати додатні розв'язки та, якщо буде, то чи забезпечить така настройка мале перерегулювання перехідних процесів.

Для поліномів 2-го порядку можна знайти аналітичний розв'язок:

$$\begin{cases} \beta_2 = \sqrt{\alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_4}; \\ \beta_1 = \sqrt{\alpha_1^2 - 2\alpha_2 + 2\beta_2}. \end{cases} \tag{7}$$

Для дослідження візьмемо ХП з біноміальними коефіцієнтами [2], Бесселя [3] та Грехема-Летропа [4], які досить часто використовують для синтезу систем автоматичного керування електромеханічними об'єктами. На рис. 2, 3, 4а зображені перехідні функції САУ з переліченими типами ХП коли $m = 0$ (пунктирні криві) та $m = 2$ (неперервні криві) з коефіцієнтами поліномів дії, розрахованими за формулами (7).

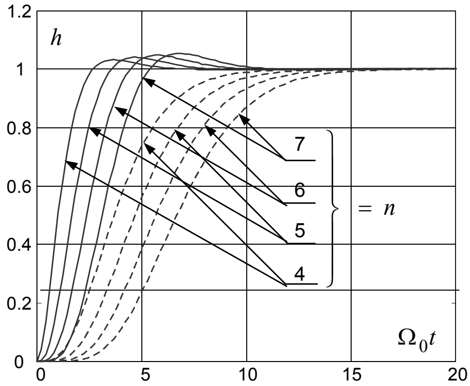


Рис. 2. Перехідні процеси в системах з ХП з біноміальними коефіцієнтами

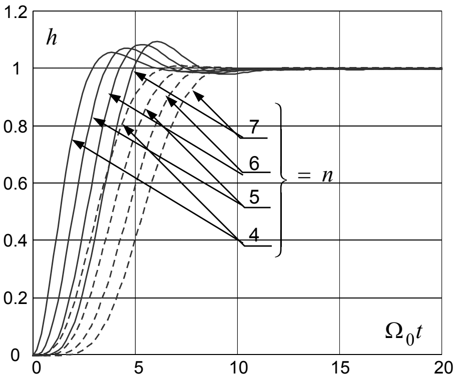
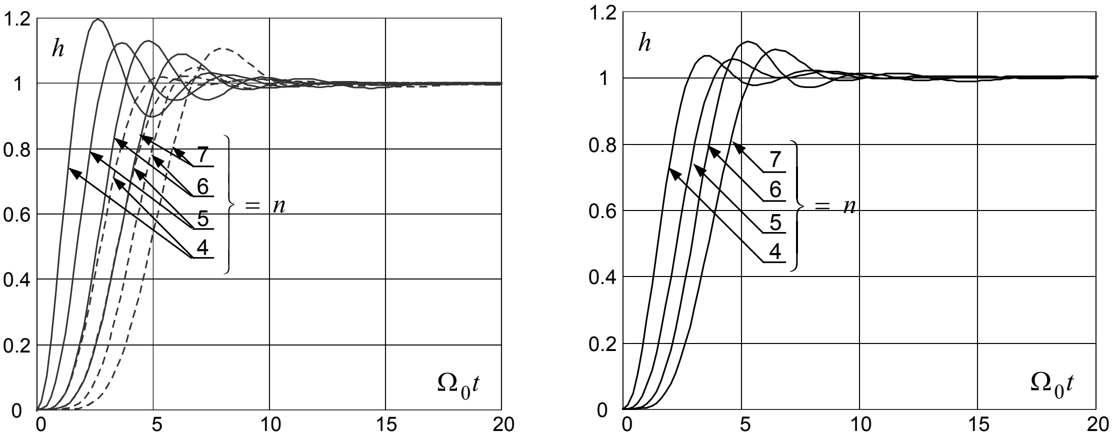


Рис. 3. Перехідні процеси в системах з ХП Бесселя



а) б)

Рис. 4. Перехідні процеси в системах з ХП Грехема-Летропа:
а) коефіцієнти ПД визначені за формулами (7);
б) коефіцієнти ПД визначені за формулами (2) та (8)

З цих рисунків видно, що доповнення передаточної функції системи поліномом дії 2-го порядку, синтезованого за формулами (7), дає найкращі результати для ХП з біноміальними коефіцієнтами ($\sigma < 5$ %, час наростання перехідної функції знижується у 3÷4 рази), задовільні результати для ХП Бесселя ($\sigma < 10\%$, час наростання перехідної функції знижується у 1,8÷2 рази) та результати, які можна вважати незадовільними, для ХП Грехема-Летропа 5÷7 порядків, для яких перерегулювання складає 12÷20 %.

У останньому випадку можна запропонувати методику синтезу ПД, використану для систем з ХП Баттерворта, коли коефіцієнт β_1 розраховується за формулою (3), коефіцієнт β_2 — за формулою, отриманою з першого рівняння системи (2) з заданим β_1

$$\beta_2 = (\beta_1^2 - \alpha_1^2 + 2\alpha_2)/2, \tag{8}$$

а коефіцієнт β_3 для полінома дії 3-го порядку — за формулою, отриманою з другого рівняння системи (2) з заданими β_1 та β_2

$$\beta_3 = (\beta_2^2 - \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_3 - 2\alpha_4)/2\beta_1. \tag{9}$$

Для ПД 4-го порядку коефіцієнти β_3 та β_4 знаходять сумісним рішенням 2-го та третього рівнянь системи (1), результатом якого є такі формули:

$$\beta_3 = \beta_1\beta_2 + \sqrt{\beta_1^2\beta_2^2 - C}, \tag{10}$$

$$\beta_4 = (A_2 - \beta_2^2 + 2\beta_1\beta_3)/2, \tag{11}$$

де

$$C = \beta_2(\beta_2^2 - A_2) - A_3, \tag{12}$$

$$A_2 = \alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_4, \tag{13}$$

$$A_3 = \alpha_3^2 - 2\alpha_2\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_5 - 2\alpha_6. \tag{14}$$

Перехідні функції системи з ХП Грехема-Летропа та ПД, синтезованим за формулами (2) і (8) показані на рис. 4б. З порівняння графіків, зображених на рис. 4а та рис. 4б, витікають переваги використання формул (2) та (8) у порівнянні з використанням формул (7) для синтезу ПД у системах з ХП Грехема-Летропа. Як і у випадку використання як ХП полінома Баттерворта перерегулювання перехідних функцій, зображених на рис. 4б, можна знизити зменшенням коефіцієнта β_1. Зрозуміло, що при цьому дещо зменшиться і швидкодія системи.

Висновки

1. Швидкодію систем, які використовують як характеристичний поліном стандартні поліноми Баттерворта, Бесселя, Грехема-Летропа та поліном з біноміальними коефіцієнтами, можна підвищити, доповнюючи їх передаточну функцію поліномом дії, синтезованим з умов модульного оптимуму (2).

2. Для систем з характеристичними поліномами з біноміальними коефіцієнтами та Бесселя коефіцієнти полінома дії m-го порядку доцільно знаходити, вирішуючи сумісно m перших рівнянь системи (2); коли $m = 2$ задача пошуку цих коефіцієнтів має аналітичне рішення (7).

3. Для систем з характеристичними поліномами Баттерворта та Грехема-Летропа доцільно задаватися значенням коефіцієнта β_1, а інші $m-1$ коефіцієнтів знаходити сумісним розв'язанням $m-1$ перших рівнянь системи (2), що надає методиці оптимізації більшої гнучкості; отримані таким чином системи рівнянь оптимізації з $m = 2 \div 4$ мають аналітичні рішення у вигляді формул (4)÷(6) для ХП Баттерворта та формул (8)÷(11) для ХП Грехема-Летропа.

4. У першому наближенні коефіцієнт β_1 можна обирати як різницю між коефіцієнтами при першому степені оператора Лапласа характеристичних поліномів n-го та $(n-m)$-го порядків (див. формулу (3)).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Толочко О. И., Коцегуб П. Х., Губарь Ю. В., Федоряк Р. В. Конструирование передаточных функций линейных САУ из условий модульного оптимума // Збірник наукових праць ДонДТУ. Серія: «Електротехніка і енергетика». — Донецьк: ДонДТУ. — 2000. — № 17. — С. 24—30.

2. Кузовков Н. Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. — М.: Машиностроение, 1976. — 184 с.

3. Айзинов М. М. Анализ и синтез линейных радиотехнических цепей в переходном режиме. — Л.: Энергия, 1968. — 376с.

4. Яворский В. П., Макшанов В. И., Ермолин В. П. Проектирование нелинейных следящих систем с тиристорным управлением исполнительным двигателем. — Л.: Энергия, 1978. — 208 с.

Рекомендована кафедрою електромеханічних систем автоматизації

Надійшла до редакції 04.11.03
Рекомендована до друку 18.11.03

Толочко Ольга Іванівна — доцент кафедри електропривода і автоматизації промислових установок.
Донецький національний технічний університет