

УДК 681.332.8

**О. Н. Романюк**, к. т. н., доц.;

**А. В. Чорний**, асп.

## **РЕАЛІЗАЦІЯ РЕНДЕРИНГУ ФОНГА З ВИКОРИСТАННЯМ СФЕРИЧНО-КУТОВОЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ**

Під час формування фотореалістичних зображень найтрудомісткішою є процедура зафарбовування. Найвні підходи до зафарбовування поверхонь базуються на тому, що більшість поверхонь, включаючи криволінійні, можуть бути представлені полігональними сітками. Якщо при цьому для кожної грані використовується по одній нормалі, то за допомогою функції тонування формуються зображення, які складаються з окремих багатокутників з різко вираженими границями переходів інтенсивностей. Гуро [1] запропонував метод отримання реалістичніших згладжених зображень. Апроксимуються значення нормалей у вершинах багатокутників. Розраховуються значення інтенсивностей для вершин, які потім в процесі растерізації полігона лінійно інтерполюються вздовж

ребер і рядків rasterізації. Метод зафарбовування Гуро доцільно застосовувати для відображення матових поверхонь та таких, які погано відбивають світло, оскільки кодова інтерполяція інтенсивностей кольору не враховує локальної кривизни поверхні.

Вища якість зображення досягається в разі реалізації методу, який запропонував Фонг [2]. В процесі тонування за методом Фонга розраховуються напрямки векторів нормалей для кожного пікселя полігональної області. Знайдені вектори нормалей, а також інформація про розташування спостерігача і джерела світла використовуються в подальшому для розрахунку інтенсивностей кольору.

Фонгом була запропонована емпірична модель освітлення, яка враховує інтенсивності розсіяного, дифузійного і дзеркального світла. Інтенсивність кольору розраховується згідно з формулою

$$I = I_a k_a + I_l (k_d \cos \psi + k_s \cos^n \lambda), \quad (1)$$

де  $I_a$ ,  $I_l$  — інтенсивності розсіяного і точкового джерела світла,  $k_a$ ,  $k_d$ ,  $k_s$  — коефіцієнти розсіяного, дифузійного і дзеркального світла,  $\psi$  — кут між напрямком світла і вектором нормалі до поверхні,  $\lambda$  — кут між відбитим напрямком світла і спостерігачем,  $n$  — коефіцієнт яскравості поверхні,  $\cos^n \lambda$  — двонаправлена дистрибутивна функція (BRDF), яка відповідає за оптичні характеристики поверхні. В загальному випадку BRDF — це математична формула, параметри якої характеризують оптичні властивості матеріалу, з якого виготовлено об'єкт.

Метод Фонга характеризується значно більшими обчислювальними затратами в порівнянні з методом Гуро, однак при цьому досягається краща локальна апроксимація поверхонь, що дає можливість формувати реалістичніші зображення. Зокрема, останній член у виразі (1) відповідає за розрахунок спекулярної складової кольору і забезпечує реалістичне відображення дзеркальних відблисків.

Якщо знаходять вектори нормалей згідно з методом Фонга, то виконують їх нормалізацію, яка зводиться до обчислення вектора одиничної довжини у напрямку, який збігається з напрямком вихідного вектора. З математичної точки зору ця процедура зводиться до ділення кожної ортогональної складової вектора на його модуль. Для нормалізації вектора необхідно виконати 3 операції ділення, 3 операції множення, 2 операції додавання та операцію знаходження квадратного кореня. Нормалізація виконується для кожного вектора нормалі поверхні, що обумовлює суттєві обчислювальні затрати на її реалізацію.

Кірк та Блейк [3] запропонували підхід, в якому класична лінійна інтерполяція векторів нормалей, що була запропонована Фонгом, замінюється на сферичну. Це дозволило обчислювати інтенсивність кольору пікселів без виконання нормалізації векторів нормалей, проте для кожного рядка rasterізації необхідно виконати операції ділення, розрахунку квадратного кореня та тригонометричні операції, що обмежує швидкодію зафарбовування.

В підході, який запропонував Р. Ф. Ліон [4], нормалізація довільного вектора нормалі  $\vec{N}$  виконується з використанням рядів Тейлора. Пропонується вираз  $1/\sqrt{\vec{N} \cdot \vec{N}}$ , який використовується для нормалізації вектора  $\vec{N}$ , розкласти в ряд Тейлора, обмежившись першими трьома членами:  $1 - \frac{1}{2}((\vec{N} \cdot \vec{N}) - 1) + \frac{3}{8}((\vec{N} \cdot \vec{N}) - 1)^2$ . При цьому з обчислювального процесу виключаються операції ділення та розрахунок квадратного кореня. Використання обмеженої кількості членів ряду Тейлора не дозволяє з достатньою точністю виконати нормалізацію вектора нормалі.

Один із підходів до нормалізації вектора нормалі  $\vec{N}$  полягає в використанні випереджальних різниць [5]. Рекурентно знаходиться кожне наступне значення довжини вектора нормалі з попереднього. Метод дозволяє виключити з обчислювального процесу 3 операції множення та додавання, але не виключає операції ділення та розрахунку квадратного кореня.

Гілой, Расел і Джакек [6] запропонували підхід, який базується на використанні карти відбиття і спрощеній моделі освітлення. Передбачалося, що джерело світла і спостерігач знаходиться відносно далеко від об'єкта. В результаті такого спрощення була отримана апроксимація значення

дзеркального відбитого світла у вигляді функції, що залежить тільки від напрямку нормалі до поверхні. В даному підході нормалізація вектора нормалі виконується з використанням табличних значень.

Метод має відносно просту апаратну реалізацію, однак якість тонування значно гірша, ніж з використанням моделі освітлення Фонга. Суттєвим недоліком даного методу є необхідність використання великих обсягів пам'яті для зберігання табличних значень, які використовуються для нормалізації векторів нормалей. Крім того, початкове припущення про те, що спостерігач знаходиться достатньо далеко від об'єкта, який підлягає зафарбовуванню, складає тільки окремий випадок.

Розглянуті методи нормалізації векторів нормалей під час зафарбовування згідно з методом Фонга характеризуються складністю обчислювального процесу за рахунок використання «довгих» операцій, що обумовлює необхідність розроблення нових підходів, які б виключали з обчислювального процесу процедуру нормалізації.

Мета статті — розробка нової модифікації методу Фонга, в якому з обчислювального процесу виключається нормалізація векторів нормалей за рахунок переходу від лінійної інтерполяції векторів нормалей до сферично-кутової інтерполяції.

Кутова інтерполяція (рис. 1) одиничних векторів нормалей між початковим  $\vec{N}_a$  та кінцевим  $\vec{N}_b$  векторами виконується згідно з виразом [7]

$$\vec{N}(w) = \vec{N}_a \frac{\sin((1-w)\psi)}{\sin \psi} + \vec{N}_b \frac{\sin(w\psi)}{\sin \psi}, \quad (2)$$

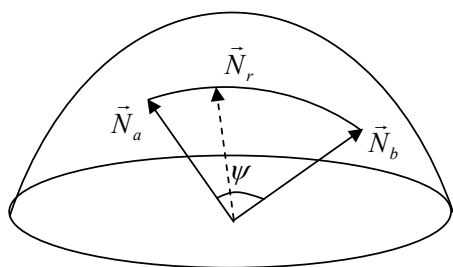


Рис. 1. Сферично-кутова інтерполяція векторів нормалей

де  $w \in [0, 1]$ , а  $\psi$  — кут між векторами нормалей  $\vec{N}_a$  та  $\vec{N}_b$ .

Використовуючи тригонометричні співвідношення, перепишемо рівняння (2) у вигляді

$$\vec{N}(w) = \vec{N}_a \frac{\sin \psi \cos(w\psi) - \cos \psi \sin(w\psi)}{\sin \psi} + \vec{N}_b \frac{\sin(w\psi)}{\sin \psi}.$$

Після спрощення отримуємо

$$\vec{N}(w) = \vec{N}_a \cos(w\psi) - \vec{N}_a \frac{\cos \psi \sin(w\psi)}{\sin \psi} + \vec{N}_b \frac{\sin(w\psi)}{\sin \psi}.$$

Запишемо останнє рівняння у вигляді

$$\vec{N}(w) = \vec{N}_a \cos(w\psi) + \frac{\vec{N}_b - \vec{N}_a \cos \psi}{\sin \psi} \sin(w\psi). \quad (3)$$

Замінімо в формулі (3) функцію  $\sin \psi$  на  $\sqrt{1 - \cos^2 \psi}$ , та представимо  $\cos \psi$ , як скалярний добуток векторів векторами  $\vec{N}_a$  і  $\vec{N}_b$ . Отримуємо

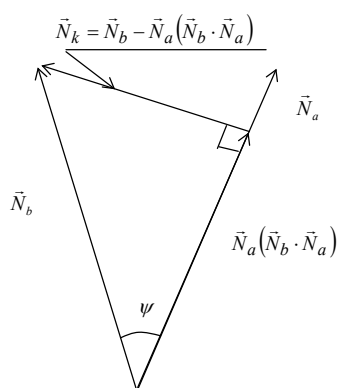
$$\vec{N}(w) = \vec{N}_a \cos(w\psi) + \frac{\vec{N}_b - \vec{N}_a (\vec{N}_b \cdot \vec{N}_a)}{\sqrt{1 - (\vec{N}_b \cdot \vec{N}_a)^2}} \sin(w\psi). \quad (4)$$

Доведемо, що в виразі (4) множник  $\frac{\vec{N}_b - \vec{N}_a (\vec{N}_b \cdot \vec{N}_a)}{\sqrt{1 - (\vec{N}_b \cdot \vec{N}_a)^2}}$  — це нормалізований вектор

$\vec{N}_b - \vec{N}_a (\vec{N}_b \cdot \vec{N}_a)$ , який є ортогональним до вектора  $\vec{N}_a$ . Позначимо його через  $\vec{N}_k$  (рис. 2).

Якщо вектор  $\vec{N}_k$  розраховується згідно з виразом  $\vec{N}_b - \vec{N}_a (\vec{N}_b \cdot \vec{N}_a)$ , то формула для визначення його довжини має вигляд

$$\|\vec{N}_k\| = \sqrt{(\vec{N}_b - \vec{N}_a (\vec{N}_b \cdot \vec{N}_a))^2} = \sqrt{\vec{N}_b^2 - 2(\vec{N}_b \cdot \vec{N}_a)(\vec{N}_b \cdot \vec{N}_a) + (\vec{N}_b \cdot \vec{N}_a)^2 \vec{N}_a^2}.$$

Рис. 2. Розрахунок вектора  $\vec{N}_k$ 

Враховуючи, що  $\vec{N}_a$  та  $\vec{N}_b$  — одиничні вектори, попереднє рівняння перепишемо так

$$\|\vec{N}_k\| = \sqrt{1 - 2(\vec{N}_b \cdot \vec{N}_a)(\vec{N}_b \cdot \vec{N}_a) + (\vec{N}_b \cdot \vec{N}_a)^2} = \sqrt{1 - (\vec{N}_b \cdot \vec{N}_a)^2}.$$

Таким чином, знаменник в другому доданку формули (4) є модулем вектора  $\vec{N}_k$ .

Вектор  $\vec{N}_k$  є ортогональним до  $\vec{N}_a$ . Дійсно, якщо  $\vec{N}_a \perp \vec{N}_k$ , то з прямокутного трикутника (рис. 2) знаходимо

$$\|\vec{N}_k\| = \|\vec{N}_b\| \sin \psi.$$

Враховуючи, що  $\|\vec{N}_b\| = 1$ , то  $\|\vec{N}_k\| = \sin \psi = \sqrt{1 - (\vec{N}_b \cdot \vec{N}_a)^2}$ ,

оскільки  $(\vec{N}_b \cdot \vec{N}_a) = \cos \psi$ .

Оскільки  $\vec{N}_k = \frac{\vec{N}_b - \vec{N}_a(\vec{N}_b \cdot \vec{N}_a)}{\sqrt{1 - (\vec{N}_b \cdot \vec{N}_a)^2}}$ , то формулу (4) можна записати у вигляді

$$\vec{N}(w) = \vec{N}_a \cos(w\psi) + \vec{N}_k \sin(w\psi). \quad (5)$$

Якщо рядок rasterізації має  $m$  пікселів, то кут між двома сусідніми векторами нормалей буде дорівнювати

$$\varphi = \frac{\psi}{m},$$

де  $\psi = \arccos(\vec{N}_a \cdot \vec{N}_b)$ .

З урахуванням останнього виразу, рівняння (5) перепишемо таким чином

$$\vec{N}(t) = \vec{N}_a \cos(t\varphi) + \vec{N}_k \sin(t\varphi), \quad (6)$$

де  $t$  — номер пікселя вздовж рядка rasterізації,  $t \in [0, m]$ .

Запишемо вираз (6) в ітераційній формі.

Знайдемо  $\vec{N}(t+1)$  і  $\vec{N}(t-1)$ .

$$\begin{aligned} \vec{N}(t+1) &= \vec{N}_a \cos((t+1)\varphi) + \vec{N}_k \sin((t+1)\varphi) = \\ &= \vec{N}_a \cos(t\varphi) \cos \varphi - \vec{N}_a \sin(t\varphi) \sin \varphi + \vec{N}_k \sin(t\varphi) \cos \varphi + \vec{N}_k \cos(t\varphi) \sin \varphi. \\ \vec{N}(t-1) &= \vec{N}_a \cos((t-1)\varphi) + \vec{N}_k \sin((t-1)\varphi) = \\ &= \vec{N}_a \cos(t\varphi) \cos \varphi + \vec{N}_a \sin(t\varphi) \sin \varphi + \vec{N}_k \sin(t\varphi) \cos \varphi - \vec{N}_k \cos(t\varphi) \sin \varphi. \end{aligned}$$

Додавши  $\vec{N}(t+1)$  і  $\vec{N}(t-1)$ , отримуємо

$$\vec{N}(t+1) + \vec{N}(t-1) = 2 \cos \varphi (\vec{N}_a \cos(t\varphi) + \vec{N}_k \sin(t\varphi)).$$

З урахуванням формули (6), останній вираз перепишемо у вигляді

$$\vec{N}(t+1) + \vec{N}(t-1) = 2\vec{N}(t) \cos \varphi.$$

Звідси

$$\vec{N}(t+1) = 2\vec{N}(t) \cos \varphi - \vec{N}(t-1). \quad (7)$$

З останньої формули можна зробити висновок, що одиничний вектор нормалі в сферично-кутовій інтерполяції можна знайти через два попередніх значення.

Якщо враховувати, що значення  $w\psi$  можна знайти шляхом нагромаджувального додавання, то для знаходження ортогональної складової одиничного вектора нормалі згідно з формулою (2) не-

обхідно виконати 2 операції ділення, 2 операції множення, 3 операції додавання та 2 операції вибірки значення синуса. Зрозуміло, що такі операції виконуються для кожної з трьох складових вектора.

В разі використання формули (7) необхідно виконати на одну ортогональну складову вектору  $\vec{N}(t+1)$  по одній операції множення, зсуву та віднімання за умови, що відомі ортогональні складові двох попередніх значень векторів нормалей.

Таким чином, можна констатувати, що досягається суттєве підвищення швидкодії тонування поверхні.

Виведемо формули для розрахунку  $\vec{N}(t+2)$ ,  $\vec{N}(t+3)$ ,  $\vec{N}(t+4)$ .

$$\vec{N}(t+2) = 2\vec{N}(t+1) \cos \varphi - \vec{N}(t).$$

Замість  $\vec{N}(t+1)$  підставимо його значення з формули (7). Отримуємо

$$\vec{N}(t+2) = 2(2\vec{N}(t) \cos \varphi - \vec{N}(t-1)) \cos \varphi - \vec{N}(t) = 4\vec{N}(t) \cos^2 \varphi - 2\vec{N}(t-1) \cos \varphi - \vec{N}(t).$$

Після спрощення знаходимо

$$\vec{N}(t+2) = \vec{N}(t) (4 \cos^2 \varphi - 1) - 2\vec{N}(t-1) \cos \varphi. \quad (8)$$

Враховуючи, що

$$4 \cos^2 \varphi - 1 = 4 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right) - 1 = 1 + 2 \cos 2\varphi,$$

остаточно можна записати, що

$$\vec{N}(t+2) = \vec{N}(t) (2 \cos 2\varphi + 1) - 2\vec{N}(t-1) \cos \varphi. \quad (9)$$

З обчислювальної точки зору формула (9) простіша за формулу (8), оскільки має меншу кількість «довгих» операцій.

Аналогічно можна показати, що

$$\vec{N}(t+3) = \cos 2\varphi (4\vec{N}(t) \cos \varphi - \vec{N}(t-1)) - 3\vec{N}(t-1); \quad (10)$$

$$\vec{N}(t+4) = 2\vec{N}(t) \cos 2\varphi (2 \cos 2\varphi + 3) - 2\vec{N}(t-1) \cos \varphi (\cos 2\varphi + 4) + \vec{N}(t). \quad (11)$$

Слід зазначити, що в формулах (9), (10) та (11), згідно яких розраховуються  $\vec{N}(t+2)$ ,  $\vec{N}(t+3)$ ,  $\vec{N}(t+4)$ , використовуються однакові операнди. Це дає можливість незалежно один від одного розрахувати відразу вектори нормалей для чотирьох точок рядка rasterізації.

Після розрахунку вектор нормалі використовується для знаходження дифузної та спекулярної складової світла. За модель освітлення пропонується використовувати модель, яка була запропонована Бліном, з урахуванням того, що джерело світла та спостерігач знаходяться відносно далеко від об'єкту, який підлягає зафарбовуванню

$$I_B = I_p(\lambda) k_p(\lambda) + I_l^{gx}(\lambda) k_{\partial}(\lambda) (\vec{N} \cdot \vec{L}) + I_l^{gx}(\lambda) k_{\partial s}(\lambda) (\vec{N} \cdot \vec{H})^n. \quad (12)$$

Значно спростити обчислення можна, використовуючи властивості скалярного добутку векторів.

Другий добуток в формулі (12), який відповідає за дифузну складову світла можна переписати таким чином

$$I_{\partial} = \vec{N} \cdot \vec{L}_{\partial}, \quad (13)$$

де  $\vec{L}_{\partial} = I_l^{gx}(\lambda) \cdot k_{\partial}(\lambda) \cdot \vec{L}$  розраховується один раз для кожного трикутника. З урахуванням формул (7) та (13), формула для розрахунку дифузної складової кольору в  $(t+1)$  точці вздовж рядка rasterізації буде мати вигляд

$$I(t+1)_{\partial} = 2I(t)_{\partial} \cos \varphi - I(t-1)_{\partial}, \quad (14)$$

де  $I(t)_\partial = \vec{L}_\partial \cdot \vec{N}(t)$ , а  $I(t-1)_\partial = \vec{L}_\partial \cdot \vec{N}(t-1)$ .

З останньої формули видно, що розрахунок дифузної складової інтенсивності кольору пікселя вимагає виконання однієї операції множення, однієї операції віднімання та однієї операції зсуву.

Аналогічним чином можна спростити розрахунок скалярного добутку  $\vec{N} \cdot \vec{H}$  для знаходження дзеркальної складової кольору.

При цьому величину  $\vec{N} \cdot \vec{H}$  для кожного пікселя вздовж рядка rasterизації можна розрахувати, використовуючи одну операцію множення, одну операцію віднімання та одну операцію зсуву.

Процес зафарбовування трикутника доцільно розбити на дві стадії:

1) Стадія підготування, де розраховуються напрямки векторів нормалей до ребер трикутника та величини  $\vec{N}_k$ ,  $\sin \varphi$ ,  $\cos \varphi$ , які в подальшому будуть використовуватись для розрахунку векторів нормалей вздовж рядків rasterизації.

2) Стадія безпосереднього зафарбовування. На даній стадії знаходяться напрямки векторів нормалей до пікселів вздовж рядка rasterизації та проводиться розрахунок інтенсивностей кольору згідно формули (10).

Приклад зафарбовування об'єкта згідно методу Фонга з використанням сферично-кутової інтерполяції векторів нормалей показаний на рис. 3.

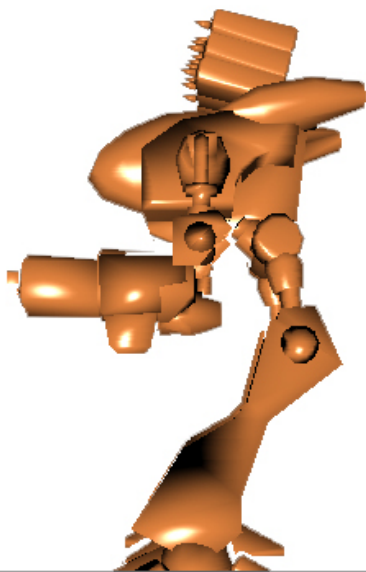


Рис. 3. Приклад зафарбовування об'єкта за методом Фонга з використанням сферично-кутової інтерполяції векторів нормалей

## Висновки

Запропонований підхід дозволяє значно зменшити обчислювальну складність методу Фонга за рахунок переходу від лінійної до сферично-кутової інтерполяції векторів нормалей. На відміну від лінійної інтерполяції векторів нормалей, для якої розрахунок вектора нормалі вимагає виконання 3 операцій множення, 3 операцій ділення, 5 операцій додавання та операції розрахунку квадратного кореня, в разі сферично-кутової інтерполяції для розрахунку вектора нормалі необхідно виконати всього 3 операції множення, зсуву та віднімання. При цьому вилучаються такі складні операції, як ділення та розрахунок квадратного кореня, це дозволяє суттєво підвищити швидкодію зафарбовування. Безпосереднє моделювання показало, що швидкодія зафарбовування з використанням запропонованого підходу підвищується більш ніж в 2 рази в порівнянні з класичним методом Фонга.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Gouraud H. Continuous shading of curved surfaces // IEEE Trans. on Comp. — June 1971. — № 6. — P. 623—628.
2. Phong B. T. Illumination for computer generated images // Comm. of the ACM. — 18(6). — June 1975. — P. 311—317.
3. Kujik A. M., Blake E. H. Faster Phong shading via angular interpolation // Computer Graphics Forum. — V. 8(4). — 1989. — P. 315—324.
4. Lyon R. F. Phong Shading Reformulation for Hardware Renderer Simplification // Apple Technical Report № 43. — 1993.
5. Duff T. Smoothly shaded rendering of polyhedral objects on raster display // Computer Graphics. — Feb. 1979. — Vol. 13.2. — P. 270—275.
6. Гилой В. К., Рассел Г., Джакел Д. Новые стандарты высокореалистичного рендеринга в реальном времени // Открытые системы. — 1995. — № 5 (13). — С. 38—42.
7. Shoemake K. Animating rotation with quaternion curves // ACM SIGGRAPH. — July 1985. — Vol. 19. — P. 245—254.

Рекомендована кафедрою програмного забезпечення

Надійшла до редакції 20.11.03  
Рекомендована до опублікування 28.11.03

**Романюк Олександр Никифорович** — доцент, **Чорний Анатолій Вікторович** — аспірант.  
Кафедра програмного забезпечення, Вінницький національний технічний університет