

УДК 621.777:519.642

С. О. Скрябін, д. т. н., с. н. с.;

К. С. Скрябін

## ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ І ЗМІННОГО ПАРАМЕТРА ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ПЛИНУ МЕТАЛУ ПІД ЧАС ОБ'ЄМНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ЗАГО- ТОВОК У КАЛІБРАХ

Визначення закономірностей переміщення металу під час деформації заготовок у калібрах у залежності від різних факторів, що впливають на нерівномірність деформації (форма і розміри калібрів, швидкість і ступінь деформації, співвідношення геометричних форм калібру і вальцованої заготовки, кантування в процесі вальцювання й ін.) дозволять підвищити якість металу отриманої заготовки, уникнути задирок під час вальцювання, зменшити нерівномірність деформації, поліпшити структуру металу і механічні властивості профілю. Необхідно зазначити, що нерівномірність процесу плинну металу є результатом різної зосередженості пластичної деформації в його об'ємі.

Теоретичними методами дослідження нерівномірності деформації визначають розподіл обтиснення оброблюваного тіла і зміну його геометрії (варіаційні методи), конфігурації і розподіли осередків деформації, поля і годографи швидкостей деформацій (методи характеристик — ліній ковзання, верхніх оцінок). Для дослідження полів деформацій використовують також методи розрахункової (уявної) координатної сітки і фотопластичності з використанням галоїдних солей срібла й оптично чутливих покриттів [1].

Використовуючи дані конкретного експерименту, ці методи дозволяють розв'язувати задачі розподілу деформації і дослідження процесу плинну металу з застосуванням апарата механіки суцільних середовищ і математичної теорії пластичності.

Теоретичні моделі, що описують плин металу в осередку деформації з математичної точки зору дуже складні і розв'язання відповідних диференціальних рівнянь і математичних моделей аналітичним методом у більшості випадків практично неможливе. Однак стрімкий розвиток обчислювальної техніки відкрив шлях до реалізації цих моделей за допомогою спеціально розроблених чисельних методів, до яких відноситься метод скінченних різниць [2].

Застосуванню цього методу, починаючи з робіт Л. Річардсона стосовно до задач пружності і пластичності, сприяли численні роботи учених дослідників: Г. Маркуса, П. В. Варвака, Л. І. Дятловицького, М. І. Длугача й ін [3].

В основі скінченно-різницевої схеми лежить заміна похідних типу  $\partial f/\partial x$  в диференціальних рівняннях на різниці відношення  $\Delta f/\Delta x$  у скінченно-різницевих рівняннях. Скінченно-різницева схема, що сходиться, математично визначається як схема, що дає скінченно-різницевий розв'язок, який наближається до розв'язку диференціального рівняння з наближенням елемента сітки до нуля.

Розглянемо застосування цього методу і методу змінного параметра на прикладі профілювання (вальцювання) заготовок круглого перерізу в овальних калібрах.

Спочатку розв'язується плоска задача для пружної області, що буде першим наближенням для розв'язання задачі в області малих пружно-пластичних деформацій. Для розв'язання останніх використовується система диференціальних рівнянь (1), методи скінченних різниць і змінного параметра.

Для проведення експерименту на торець і поверхню заготовок із сплаву АК6 діаметром 35 мм і довжиною 200 мм була нанесена координатна сітка. Заготовки нагрівали в електропечі опору і вальцювали в овальному калібрі на кувальних вальцях С162А з температурою 440 °С. Температура вальцювання контролювалася хромель-алюмелевою термопарою. Переміщення точок координа-

тної сітки на зразках, вирізаних з вальцьованої заготовки, вимірювали приладом ІЗА-2. Похибка під час вимірювання складала 0,05 мм.

Для складання системи лінійних алгебричних рівнянь на поперечному перерізі зразка, вирізаного на ділянці з постійною шириною і висотою заготовки після вальцювання, була нанесена сітка. Сітку будували по точках (1, 2, 4, 6, 8, 10), нанесених на зразок до вальцювання (рис. 1, число поділок  $n = 24$ ).

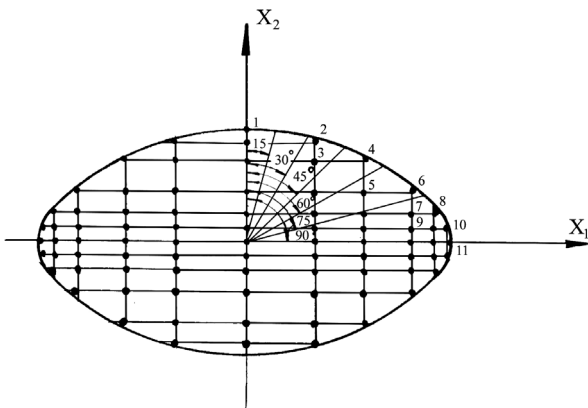


Рис. 1. Поперечний переріз зразка після вальцювання з нанесеною координатною сіткою, побудованою по точках, нанесених на зразок до вальцювання

Для розв'язання крайової задачі (визначення переміщень точок усередині зразка при вальцюванні в овалному калібрі) методом скінченних різниць контур  $\Gamma$  заміняли сітковим контуром, рис. 2.

У зв'язку з тим, що поперечний переріз зразка після вальцювання симетричний щодо осей координат, для розв'язання поставленої задачі досить розглянути 1/4 частину цього перерізу, рис. 3.

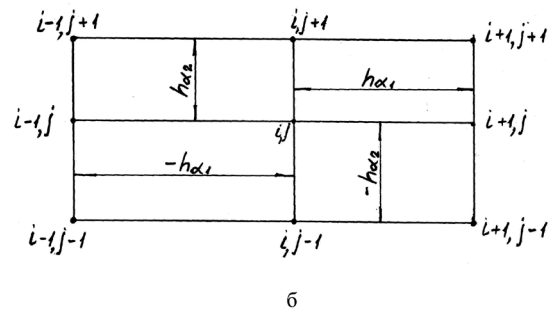
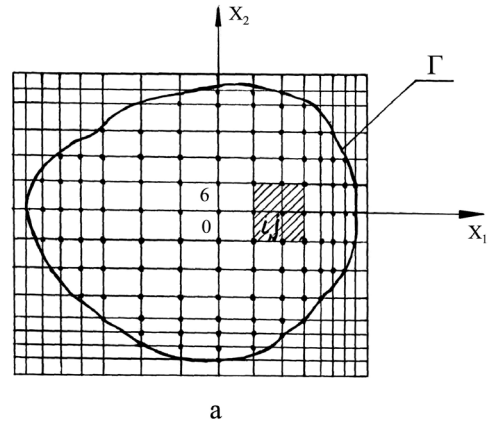


Рис. 2. Криволінійна однозв'язна кінцева область: а – загальний вид; б – елементарна комірка  $(i, j)$  досліджуваної області

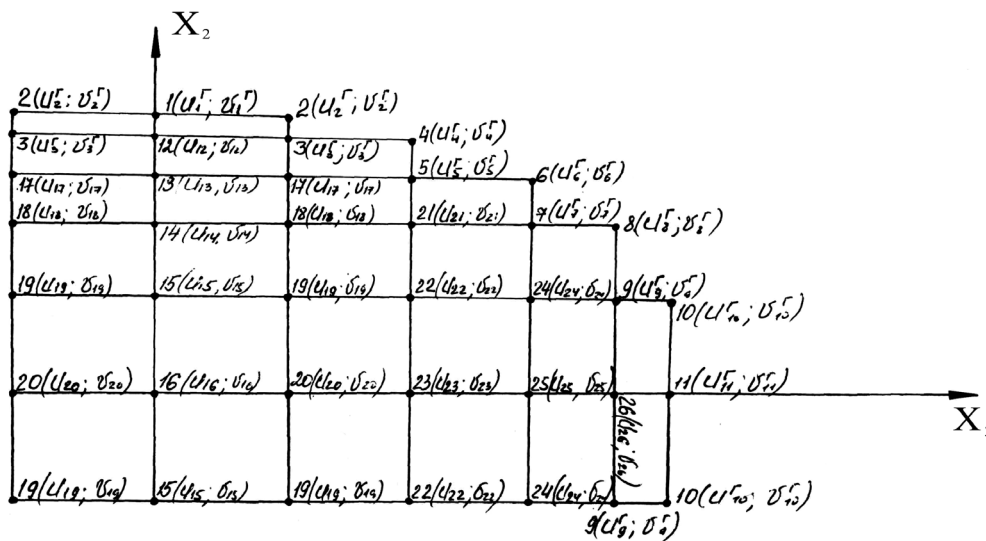


Рис. 3. Область сітки 1/4 частини зразка

Розглянемо в області  $\bar{G}$  систему диференціальних рівнянь Ламе в такому вигляді:

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu)\partial^2 u/\partial x_1^2 + \mu\partial^2 u/\partial x_2^2 + (\lambda + \mu)\partial^2 v/\partial x_1\partial x_2 = 0; \\ \mu\partial^2 v/\partial x_1^2 + (\lambda + \mu)\partial^2 v/\partial x_2^2 + (\lambda + \mu)\partial^2 u/\partial x_1\partial x_2 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де  $u$  і  $v$  — горизонтальна і вертикальна складові переміщень,  $\lambda, \mu$  — коефіцієнти Ламе.

Для чисельного розв’язання системи (1) в області  $\bar{G}$  використовуємо нерівномірну прямокутну сітку. Розіб’ємо відрізок  $O, \ell_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) точками на  $n/4 - 1$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) частин із кроком  $h_\alpha^{(i)}$  ( $\alpha = 1, 2$ ) по напрямку  $X_1, X_2$  (рис. 3).

$$\begin{aligned} h_{\alpha_1}^{(i)} &= 2\Delta \sin \frac{\pi}{n} \cos(2S - 1) + u_S^{(\Gamma)} - u_{S-1}^{(\Gamma)}; \\ h_{\alpha_2}^{(i)} &= 2\Delta \sin \frac{\pi}{n} \cos(2S - 1) + v_{\frac{n}{4}+1-S}^{(\Gamma)} - v_{\frac{n}{4}-S}^{(\Gamma)}, \end{aligned}$$

де  $S = 1, n/4 - 1$ ;  $\gamma_\Gamma = \left\{ u_S^{(\Gamma)} \right\} \times v_{\frac{n}{4}-S}^{(\Gamma)}$ ;  $\gamma_\Gamma \subset \Gamma$ ;  $i = 1, \frac{1}{2} \left( \frac{n}{4} - 2 \right) \left( \frac{n}{4} - 1 \right)$ ,  $\Delta$  — константа.

Диференційні рівняння системи (1) заміняємо скінченно-різницевиими. Другі і змішані похідні для внутрішнього вузла  $[i, j]$  (рис. 2) будуть мати такий вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \Big|_{i,j} = u_{x_1 x_1} \Big|_{i,j} = \frac{h_{\alpha_1} u_{i-1,j} + h_{\alpha_1} u_{i+1,j} - (h_{\alpha_1}^- + h_{\alpha_1}^+) \cdot u_{i,j}}{-h_{\alpha_1} h_{\alpha_1} (h_{\alpha_1}^- + h_{\alpha_1}^+)}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \Big|_{i,j} = u_{x_2 x_2} \Big|_{i,j} = \frac{h_{\alpha_2} u_{i,j-1} + h_{\alpha_2} u_{i,j+1} - (h_{\alpha_2}^- + h_{\alpha_2}^+) \cdot u_{i,j}}{-h_{\alpha_2} h_{\alpha_2} (h_{\alpha_2}^- + h_{\alpha_2}^+)}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{i,j} = u_{x_1 x_2} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} u_{i,j} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{(h_{\alpha_1}^- + h_{\alpha_1}^+) (h_{\alpha_2}^- + h_{\alpha_2}^+)}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \Big|_{i,j} = v_{x_1 x_1} \Big|_{i,j} = \frac{h_{\alpha_1} v_{i-1,j} + h_{\alpha_1} v_{i+1,j} - (h_{\alpha_1}^- + h_{\alpha_1}^+) \cdot v_{i,j}}{-h_{\alpha_1} h_{\alpha_1} (h_{\alpha_1}^- + h_{\alpha_1}^+)}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \Big|_{i,j} = v_{x_2 x_2} \Big|_{i,j} = \frac{h_{\alpha_2} v_{i,j-1} + h_{\alpha_2} v_{i,j+1} - (h_{\alpha_2}^- + h_{\alpha_2}^+) \cdot v_{i,j}}{-h_{\alpha_2} h_{\alpha_2} (h_{\alpha_2}^- + h_{\alpha_2}^+)}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{i,j} = v_{x_1 x_2} \Big|_{i,j} = \frac{v_{i+1,j+1} + v_{i-1,j-1} - v_{i-1,j+1} - v_{i+1,j-1}}{(h_{\alpha_1}^- + h_{\alpha_1}^+) (h_{\alpha_2}^- + h_{\alpha_2}^+)}; \quad (7)$$

Системі (1) поставимо у відповідність систему різницевих рівнянь, яка для внутрішнього вузла  $(i, j)$ , рис. 2б, згідно (2—7) в індексній формі прийме вигляд:

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(i)} u_{i-1,j} + \alpha_2^{(i)} u_{i+1,j} + \alpha_3^{(i)} u_{i,j+1} + \alpha_4^{(i)} u_{i,j-1} - u_{i,j} + \alpha_5^{(i)} (v_{i+1,j+1} + v_{i-1,j-1} v_{i-1,j+1} - v_{i+1,j-1}) &= 0; \\ \beta_1^{(i)} v_{i-1,j} + \beta_2^{(i)} v_{i+1,j} + \beta_3^{(i)} v_{i,j+1} + \beta_4^{(i)} v_{i,j-1} - v_{i,j} + \beta_5^{(i)} (u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1}) &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

де 
$$\alpha_1^{(i)} = \frac{(\lambda + 2\mu)^{-} h_{\alpha_2}^{(i)2} \cdot h_{\alpha_1}^{(i)} \cdot h_{\alpha_2}^{(i)}}{D_1}; \tag{9}$$

$$\alpha_2^{(i)} = \frac{(\lambda + 2\mu)^{-} h_{\alpha_1}^{(i)} \cdot h_{\alpha_2}^{(i)2} \cdot h_{\alpha_2}^{(i)}}{D_1}; \tag{10}$$

$$\alpha_3^{(i)} = \frac{\mu^{-} h_{\alpha_1}^{(i)2} \cdot h_{\alpha_1}^{(i)} \cdot h_{\alpha_2}^{(i)}}{D_1}; \tag{11}$$

$$\alpha_4^{(i)} = \frac{\mu^{-} h_{\alpha_1}^{(i)} \cdot h_{\alpha_1}^{(i)} \cdot h_{\alpha_2}^{(i)}}{D_1}; \tag{12}$$

$$D_1 = (\lambda + 2\mu) \left( h_{\alpha_1}^{(i)} + h_{\alpha_1}^{(i)} \right)^{-} h_{\alpha_2}^{(i)2} h_{\alpha_2}^{(i)} + \mu \left( h_{\alpha_2}^{(i)} + h_{\alpha_2}^{(i)} \right)^{-} h_{\alpha_1}^{(i)2} h_{\alpha_1}^{(i)}; \tag{13}$$

$$\alpha_5^{(i)} = \frac{(\lambda + \mu)^{-} h_{\alpha_2}^{(i)2} \cdot h_{\alpha_1}^{(i)2} \cdot h_{\alpha_1}^{(i)} \cdot h_{\alpha_2}^{(i)}}{\left( h_{\alpha_1}^{(i)} + h_{\alpha_1}^{(i)} \right) \cdot \left( h_{\alpha_2}^{(i)} + h_{\alpha_2}^{(i)} \right) \left[ \left( h_{\alpha_1}^{(i)} + h_{\alpha_1}^{(i)} \right)^{-} h_{\alpha_2}^{(i)2} h_{\alpha_2}^{(i)} (\lambda + 2\mu) + \mu h_{\alpha_1}^{(i)2} h_{\alpha_1}^{(i)} \left( h_{\alpha_2}^{(i)} + h_{\alpha_2}^{(i)} \right)^{-} \right]}; \tag{14}$$

$$\beta_1^{(i)} = \frac{\mu^{-} h_{\alpha_2}^{(i)2} \cdot h_{\alpha_1}^{(i)} \cdot h_{\alpha_2}^{(i)}}{D_2}; \tag{15}$$

$$\beta_2^{(i)} = \frac{\mu^{-} h_{\alpha_1}^{(i)2} \cdot h_{\alpha_2}^{(i)2} \cdot h_{\alpha_2}^{(i)}}{D_2}; \tag{16}$$

$$\beta_3^{(i)} = \frac{(\lambda + 2\mu)^{-} h_{\alpha_1}^{(i)2} \cdot h_{\alpha_1}^{(i)} \cdot h_{\alpha_2}^{(i)}}{D_2}; \tag{17}$$

$$\beta_4^{(i)} = \frac{(\lambda + 2\mu)^{-} h_{\alpha_1}^{(i)2} \cdot h_{\alpha_2}^{(i)} \cdot h_{\alpha_1}^{(i)}}{D_2}; \tag{18}$$

$$D_2 = \mu \left( h_{\alpha_1}^{(i)} + h_{\alpha_1}^{(i)} \right)^{-} h_{\alpha_2}^{(i)2} \cdot h_{\alpha_2}^{(i)} + (\lambda + 2\mu) \cdot \left( h_{\alpha_2}^{(i)} + h_{\alpha_2}^{(i)} \right)^{-} h_{\alpha_1}^{(i)2} \cdot h_{\alpha_1}^{(i)}; \tag{19}$$

$$\beta_5^{(i)} = \frac{(\lambda + \mu)^{-} h_{\alpha_2}^{(i)2} \cdot h_{\alpha_1}^{(i)2} \cdot h_{\alpha_1}^{(i)} \cdot h_{\alpha_2}^{(i)}}{\left( h_{\alpha_1}^{(i)} + h_{\alpha_1}^{(i)} \right) \left( h_{\alpha_2}^{(i)} + h_{\alpha_2}^{(i)} \right) \left[ \mu \left( h_{\alpha_1}^{(i)} + h_{\alpha_1}^{(i)} \right)^{-} h_{\alpha_2}^{(i)2} h_{\alpha_2}^{(i)} + (\lambda + 2\mu) \left( h_{\alpha_2}^{(i)} + h_{\alpha_2}^{(i)} \right)^{-} h_{\alpha_1}^{(i)2} \cdot h_{\alpha_1}^{(i)} \right]}; \tag{20}$$

Отже, для всієї області  $\bar{G}$  одержимо систему алгебричних рівнянь щодо невідомих  $u_{i,j}, v_{i,j}$ . У матричній формі цю систему представимо у вигляді

$$A\bar{x} = \bar{y}, \tag{21}$$

де  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ,  $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ ,  $A = \|Q_{i,j}\|^m$  — квадратна матриця розмірності

$$(m \times m), m = \frac{n}{4} \left( \frac{n}{4} - 1 \right).$$

$$\text{Загальне рішення (1) представимо у вигляді } x_i = \sum_{s=1}^m Q_{i,j}^{(-1)} y_s, \quad (s = \overline{1, m}). \quad (22)$$

Для визначення елементів  $\alpha_j^{(i)}, \beta_j^{(i)}$  за формулами (9—20), де  $i = \overline{1, 10}; j = \overline{1, 5}$  використаємо дані таблиць 1, 2.

Таблиця 1

Значення  $h_{\alpha_1}^{(i)}, -h_{\alpha_1}^{(i)}, h_{\alpha_2}^{(i)}, -h_{\alpha_2}^{(i)}$  для визначення елементів  $\alpha_j^{(i)}$  матриці  $\|A\|$

$i$	$-h_{\alpha_1}^{(i)}$	$-h_{\alpha_2}^{(i)}$	$h_{\alpha_1}^{(i)}$	$h_{\alpha_2}^{(i)}$
1	4,4660	1,7790	4,6045	1,2485
2	4,4660	2,4070	4,6045	1,7790
3	4,4660	4,1665	4,6045	2,4370
4	4,4660	4,1665	4,6045	4,1665
5	4,6045	2,4370	3,9390	1,7790
6	4,6045	4,1665	3,9390	2,4370
7	4,6045	4,1665	3,9390	4,1665
8	3,9390	4,1665	4,0535	2,4370
9	3,9390	4,1665	4,0535	4,1665
10	4,0535	4,1665	2,5740	4,1665

Таблиця 2

Значення  $h_{\alpha_1}^{(i)}, -h_{\alpha_1}^{(i)}, h_{\alpha_2}^{(i)}, -h_{\alpha_2}^{(i)}$  для визначення елементів  $\beta_j^{(i)}$  матриці  $\|A\|$

$i$	$-h_{\alpha_1}^{(i)}$	$-h_{\alpha_2}^{(i)}$	$h_{\alpha_1}^{(i)}$	$h_{\alpha_2}^{(i)}$
1	4,4660	1,2485	4,4660	0,7375
2	4,4660	1,7790	4,4660	1,2485
3	4,4660	2,4370	4,4660	1,7790
4	4,4660	4,1665	4,4660	2,4370
5	4,4660	1,7790	4,6045	1,2485
6	4,4660	2,4370	4,6045	1,7790
7	4,4660	4,1665	4,6045	2,4370
8	4,6045	2,4370	3,9390	1,7790
9	4,6045	4,1665	3,9390	2,4370
10	3,9390	4,1665	4,0535	2,4370

У табл. 3 показані дискретні значення функцій переміщень по координатних осях  $u(x_1, x_2)$  і  $v(x_1, x_2)$  зразка після вальцювання, а в табл. 4 — положення цих же точок, отримані після рішення системи (1), представленій в матричній формі (23).

Таблиця 3

Дискретні значення функцій переміщень  $u, v^{(\Gamma)}$  по координатних осях, мм

$u_1^{(\Gamma)}$	$u_2^{(\Gamma)}$	$u_3^{(\Gamma)}$	$u_4^{(\Gamma)}$	$u_5^{(\Gamma)}$	$u_6^{(\Gamma)}$
<b>0,0000</b>	<b>0,3435</b>	<b>-0,1025</b>	<b>-0,5490</b>	<b>-0,8650</b>	<b>-1,1810</b>
$v_1^{(\Gamma)}$	$v_2^{(\Gamma)}$	$v_3^{(\Gamma)}$	$v_4^{(\Gamma)}$	$v_5^{(\Gamma)}$	$v_6^{(\Gamma)}$
<b>0,5605</b>	<b>6,1950</b>	<b>5,5742</b>	<b>4,9535</b>	<b>4,1997</b>	<b>3,4460</b>
$u_7^{(\Gamma)}$	$u_8^{(\Gamma)}$	$u_9^{(\Gamma)}$	$u_{10}^{(\Gamma)}$	$u_{11}^{(\Gamma)}$	
<b>1,8297</b>	<b>-2,4785</b>	<b>-2,7760</b>	<b>-3,0735</b>	<b>-3,9430</b>	
$v_7^{(\Gamma)}$	$v_8^{(\Gamma)}$	$v_9^{(\Gamma)}$	$v_{10}^{(\Gamma)}$	$v_{11}^{(\Gamma)}$	
<b>2,6820</b>	<b>1,9180</b>	<b>1,2850</b>	<b>0,6430</b>	<b>0,0000</b>	

Таблиця 4

Значення функцій переміщень  $u, v$  усередині овального калібру

$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$	$u_7$
<b>0,0000</b>	<b>0,3435</b>	<b>-0,1025</b>	<b>-0,5490</b>	<b>-0,8650</b>	<b>-1,1810</b>	<b>-1,8297</b>
$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$
<b>6,5605</b>	<b>6,1950</b>	<b>5,5742</b>	<b>4,9535</b>	<b>4,1997</b>	<b>3,4460</b>	<b>2,6820</b>
$u_8$	$u_9$	$u_{10}$	$u_{11}$	$u_{12}$	$u_{13}$	$u_{14}$
<b>-2,4785</b>	<b>-2,7760</b>	<b>-3,0735</b>	<b>-3,9430</b>	<b>0,0000</b>	<b>0,0000</b>	<b>0,0000</b>
$v_8$	$v_9$	$v_{10}$	$v_{11}$	$v_{12}$	$v_{13}$	$v_{14}$
<b>1,9180</b>	<b>1,2850</b>	<b>0,6430</b>	<b>0,0000</b>	<b>4,1670</b>	<b>2,4298</b>	<b>1,1080</b>
$u_{15}$	$u_{16}$	$u_{17}$	$u_{18}$	$u_{19}$	$u_{20}$	
<b>0,0000</b>	<b>0,0000</b>	<b>0,53821</b>	<b>0,33687</b>	<b>0,24940</b>	<b>0,46813</b>	
$v_{15}$	$v_{16}$	$v_{17}$	$v_{18}$	$v_{19}$	$v_{20}$	
<b>0,53851</b>	<b>0,0000</b>	<b>3,31667</b>	<b>1,3214</b>	<b>0,44629</b>	<b>0,0000</b>	
$u_{21}$	$u_{22}$	$u_{23}$	$u_{24}$	$u_{25}$	$u_{26}$	
<b>-0,50002</b>	<b>0,63021</b>	<b>1,0457</b>	<b>0,67905</b>	<b>1,6988</b>	<b>2,3779</b>	
$v_{21}$	$v_{22}$	$v_{23}$	$v_{24}$	$v_{25}$	$v_{26}$	
<b>-0,31011</b>	<b>-0,32260</b>	<b>0,0000</b>	<b>0,85063</b>	<b>0,0000</b>	<b>0,0000</b>	

Оброблення результатів експериментів проводили за допомогою стандартної програми розв'язання системи алгебричних лінійних рівнянь. У програмі використаний метод виключення за допомогою найбільшого провідного діляника.

Використовуючи дані першого наближення, знаходимо змінні параметри пружності  $\lambda^{(k+1)}$  і  $\mu^{(k+1)}$ , що необхідні для визначення матриці системи. Для визначення функції пластичності  $\varphi$  використовуємо діаграму границі текучості  $\sigma_{0,2}$  сплаву АК6. Границя текучості  $\sigma_{0,2}$  визначається з таких умов: температура деформування сплаву АК6 440 °С, швидкість деформації 6 с<sup>-1</sup>. Знайшовши друге наближення, аналогічно переходимо до третього, четвертого і т.д. Процес наближення здійснюється доти, поки буде виконуватись нерівність (24). Дана методика була перевірена на різних зразках

$$\left| \frac{\varepsilon_i^{(m)} - \varepsilon_i^{(m-1)}}{\varepsilon_i^{(m)}} \right| < Z, \tag{24}$$

де  $Z$  — прийнята точність похибки розрахунку.

На рис. 4, 5, 6 представлені дані, отримані під час визначення переміщення металу в першому, другому і третьому наближеннях. Визначення переміщень точок координатної сітки на торці зразка виконувалося після коректування значень переміщення цих точок, зв'язаних з опуклістю торцевої частини вальцьованої заготовки, що вносить деяку похибку в порівнянні розрахункових даних з експериментальними.

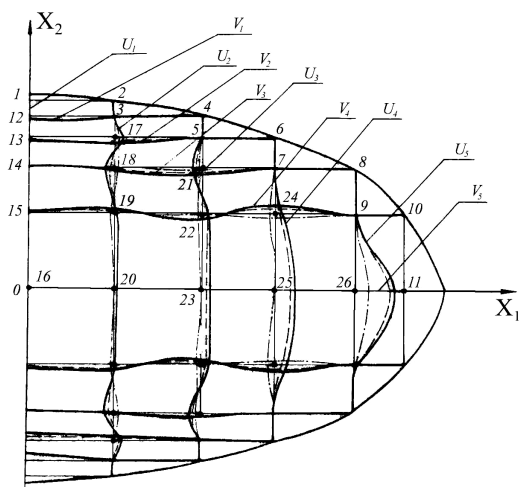


Рис. 4. Характер переміщення точок усередині досліджуваної області. Зразок 1.

Сплав АК6,  $\varnothing 35$  мм,  $\frac{R_k}{R_3} = 2,2$ : – перше наближення; --- друге наближення; --- третє наближення

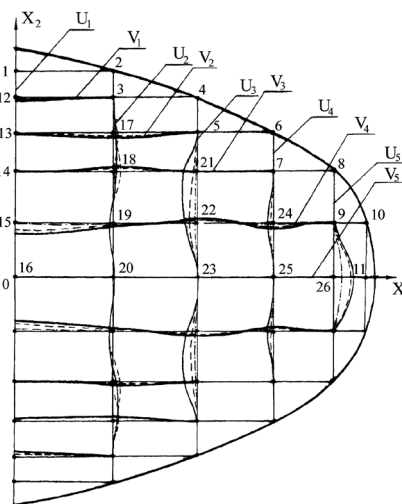


Рис. 5. Характер переміщення точок усередині досліджуваної області. Зразок 2. Сплав АК6,

$\varnothing 50$  мм,  $\frac{R_k}{R_3} = 1,39$ : – перше наближення; --- друге наближення; --- третє наближення

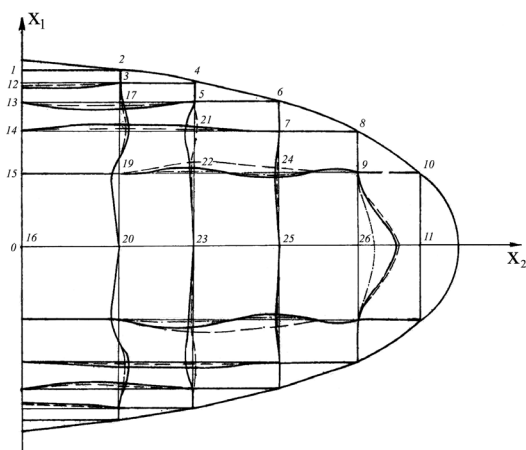


Рис. 6. Характер переміщення точок усередині досліджуваної області. Зразок 3. Сплав АК6,

$\varnothing 50$  мм,  $\frac{R_k}{R_3} = 2,1$ : ( – перше наближення; --- друге наближення; --- третє наближення)

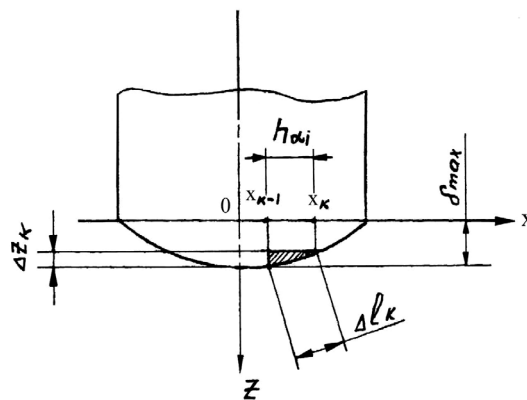


Рис. 7. Схема для визначення опуклості торцевої поверхні вальцьованої заготовки

Скривлення торця деформованої заготовки в площині XOZ (рис. 7), як показали експериментальні дослідження, з досить високою точністю апроксимуються рівнянням другого порядку

$$Z = a_0 x^2 + a_1 x + a_2, \text{ де } X = \pm \frac{v}{2}, v \text{ — ширина деформованої заготовки.}$$

Для визначення коефіцієнтів  $a_0, a_1, a_2$  використовуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} a_0 \frac{\sigma^2}{4} + a_1 \frac{\sigma}{2} = -a_2 = -\delta_{\max}, \\ a_0 \frac{\sigma^2}{4} - a_1 \frac{\sigma}{2} = -a_2 = -\delta_{\max}, \end{cases}$$

де  $Z_{(0)} = a_2 = \delta_{\max}$  — максимальне значення вигину деформованої поверхні торця заготовки.

Квадратична функція, що апроксимує поверхню торця заготовки буде визначатися залежністю

$$Z = \delta_{\max} \left( 1 - \frac{4x^2}{\sigma^2} \right),$$

де  $Z, x$  — поточні координати поверхні торця заготовки.

Дійсні значення зміщення координатної сітки торця заготовки уздовж осі  $OX$  визначимо за формулою

$$h_{\alpha_1}^{(i,j)} = \sqrt{\Delta \bar{X}_k^{(i,j)^2} - \Delta \bar{Z}_k^{(i,j)^2}},$$

де  $K = 1 - \frac{\rho}{4}$ ;  $\Delta Z_k^{(i,j)} = Z_{k-1}^{(i,j)} - Z_k^{(i,j)}$ ;  $\Delta \bar{X}_k^{(i,j)} = \bar{X}_{k-1}^{(i,j)} - \bar{X}_k^{(i,j)}$ .

Дискретні значення  $Z_k^{(i,j)}$  вигину торцевої частини вальцьованої заготовки визначимо за формулою  $\Delta Z_k^{(i,j)} = \delta_{\max} \left( 1 - 4X_k^{(i,j)^2} / \sigma^2 \right)$ , а значення  $\Delta Z_k^{(i,j)}$  і  $\Delta X_k^{(i,j)}$  з формул

$$\Delta Z_k^{(i,j)} = Z_{k-1}^{(i,j)} - Z_k^{(i,j)}, \quad \Delta X_k^{(i,j)} = \bar{X}_{k-1}^{(i,j)} - \bar{X}_k^{(i,j)}.$$

Максимальна розбіжність результатів розрахункових, рис. 4, 5, 6 і експериментальних даних, рис. 8, 9, 10 під час перевірки запропонованої методики складає 35,5 % для другого і до 10 % для третього наближень, що підтверджує можливість застосування запропонованої методики для дослідження плинності металу під час об'ємного деформування заготовок у калібрах довільної форми.

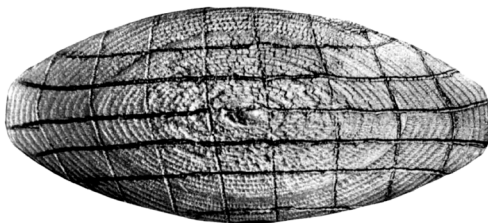


Рис. 8. Деформація координатної сітки на торці зразка після вальцювання в овальному калібрі.  
Зразок 1. Сплав АК6,  $\varnothing 35$  мм,  $R_k/R_3 = 2,2$

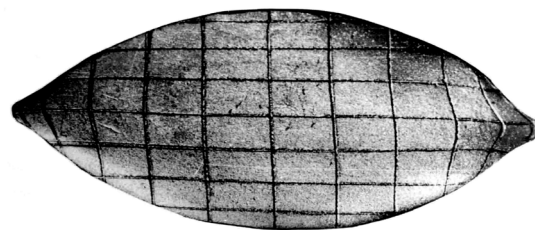


Рис. 9. Деформація координатної сітки на торці зразка після вальцювання в овальному калібрі.  
Зразок 2. Сплав АК6,  $\varnothing 50$  мм,  $R_k/R_3 = 1,39$



Рис. 10. Деформація координатної сітки на торці зразка після вальцювання в овальному калібрі.  
Зразок 3. Сплав АК6,  $\varnothing 50$  мм,  $R_k/R_3 = 2,1$

Встановлено оптимальний інтервал відношення  $R_k/R_3$  для вальцювання заготовок, який знаходиться в діапазоні 1,45...1,8 (де  $R_k$  — радіус калібру;  $R_3$  — радіус заготовки).

У перехідній зоні деформівної заготовки (рис. 11) у шарі  $d_z$ , рівному кроку просторової сітки в напрямку осі  $OZ$ , тензор деформації можна представити в такому вигляді:



$$T_{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \quad (25)$$

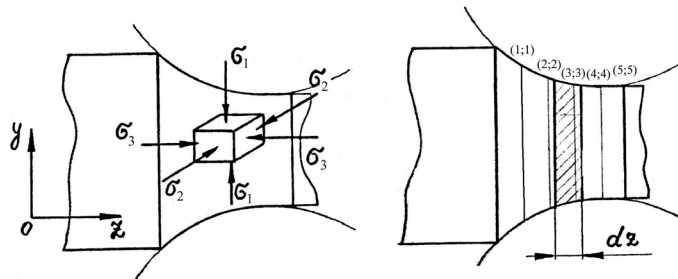


Рис. 11. Схема напруженого стану в перехідній зоні заготовки, що вальцюється

В такому вигляді тензора деформації величина зсуву  $W$  для шару  $dz$  буде визначатися формулою

$$W = \varepsilon_z Z. \quad (26)$$

Використовуючи узагальнений закон Гука, одержимо

$$W = -\frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) Z \quad (27)$$

або в переміщеннях

$$W = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y). \quad (28)$$

Використовуючи геометричні співвідношення, одержимо

$$W = -\frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) Z. \quad (29)$$

Далі, замінюючи у формулі (29) частинні похідні їх скінченними різницями, остаточно одержимо формулу для визначення переміщень уздовж осі  $OZ$

$$W = -\frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_{\alpha_1}^{(j)}} + \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h_{\alpha_2}^{(j)}} \right) Z. \quad (30)$$

Значення  $u_{i,j}, v_{i,j}$  для кожного перерізу визначаються за описаною вище методикою.

На рис. 12 представлений загальний вид характеру переміщення металу в тривимірному просторі, а на рис. 13 на торцевому зрізі вальцованої заготовки.

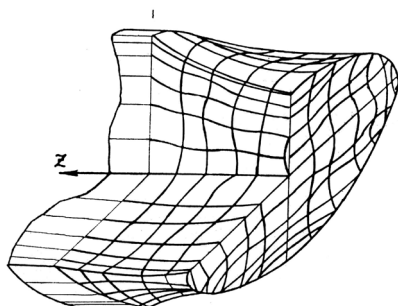


Рис. 12. Загальний вигляд характеру переміщення металу в тривимірному просторі вальцованої заготовки

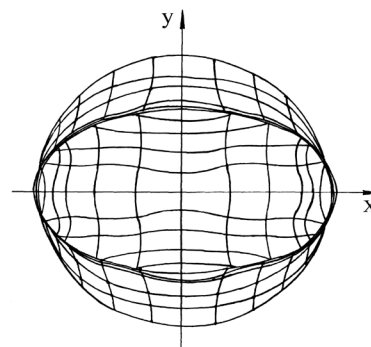


Рис. 13. Загальний вигляд характеру переміщення металу на торцевому зрізі вальцованої заготовки

## Висновки

1. Запропоновано метод теоретичного дослідження плинності металу в осередку деформації, що має контур довільної форми з дискретно заданими граничними умовами, під час гарячого об'ємного деформування заготовок в процесах вальцювання (прокатки).

2. Метод дозволяє розкрити картину переміщення металу як для сталей (деформація з постійним обтисненням), так і для несталей (деформації зі збільшуваним або зі зменшуваним обтисненням) процесів гарячого деформування, визначити нерівномірність деформації в залежності від співвідношення геометричних форм калібру і zdeформованої заготовки, знайти область можливої концентрації напруг.

3. Максимальна розбіжність теоретичних й експериментальних результатів складає 35,5 % для другого і до 10 % для третього наближень. Це підтверджує можливість застосування цього методу для дослідження плинності металу в осередку деформації під час вальцювання (прокатки) заготовок в калібрах довільної форми.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Теорияковки и штамповки // Е. П. Унков, У. Джонсон, В. Л. Колмогоров и др.; Под общ. ред. Е. П. Ункова, А. Г. Овчинникова. — М.: Машиностроение, 1992. — 720 с.
2. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1977. — 456 с.
3. Победра Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. — 344 с.

Рекомендована кафедрою технології та автоматизації машинобудування

Надійшла до редакції 17.09.03  
Рекомендована до друку 20.09.03

*Скрябін Семен Олександрович* — старший науковий співробітник, начальник лабораторії; *Скрябін Костянтин Семенович* — інженер.

Український НДІ авіаційних технологій, м. Київ