

# РАДІОЕЛЕКТРОНІКА ТА РАДІОЕЛЕКТРОННЕ АПАРАТОБУДУВАННЯ

---

УДК 621.317.7

Ю. П. Гульчак, к. т. н., доц.

## МЕТОДИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ТА АНАЛІЗ ПОХИБОК ВИМІРЮВАНЬ ЗМІНЮВАНИХ З ЧАСОМ ФАЗОВИХ ЗСУВІВ

### Постановка задачі

В процесі вимірювання деякої сталої величини виходять з того, що в принципі його можна повторити як завгодно багато раз. При цьому середнє значення перших  $n$  вимірювань визначає математичне сподівання, а випадкову похибку — середнє квадратичне відхилення (СКВ). Методи оцінки похибки вимірювання статичних (незмінних з часом) величин базуються на класичній статистиці.

На практиці ж часто виникає проблема вимірювання параметрів, які змінюються з часом (зростають чи спадають), і закон зміни яких є наближено відомим чи прогнозованим. В цьому випадку для визначення СКВ необхідно враховувати випадкове відхилення окремого  $i$ -го вимірювання лише від дійсного на даний момент значення параметра, тобто

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\varphi_i - \varphi_i^*)^2 / n}, \quad (1)$$

де  $\varphi_i^*$  — відоме в  $i$ -й момент часу значення деякого параметра.

Не завжди можливо спрогнозувати наперед характер зміни залежності  $\varphi^*(t)$ . Зокрема під час оптичних вимірювань навіть створення підземних лабораторій з масивними бетонними платформами не дозволяє гарантовано усунути вплив зовнішніх завад і у разі повторення експерименту дає різні результати. Тому в цьому випадку використати попередні статистичні дані для прогнозування характеру зміни вимірюваного параметра неможливо. Коли дійсні значення  $\varphi_i^*$  невідомі, але функція  $\varphi$  змінюється плавно без розривів і, якщо випадкові відхилення її незалежні, то можна оцінювати точність і міру розсіювання результатів відслідковуючи зміну функції  $\varphi(t)$  (масив вимірних даних  $\varphi_i$ ), та порівнюючи (ідентифікуючи) її значення з відомими функціональними залежностями.

Метою даної роботи є розробка методик ідентифікації вказаних вище функцій та оцінка похибки вимірювання параметрів, що змінюються з часом за наближено відомою чи передбачуваною аналітичною залежністю. Загальна похибка при цьому буде визначатися двома складовими: похибками засобів вимірювання та ідентифікації функціональної залежності. Як приклад такого параметра розглянутий процес вимірювання накопичення фазових зсувів у лазерних вимірювачах переміщень [1].

### Приклад практичної задачі, що потребує розв'язання

В лазерних інтерферометрах вимірювання переміщень використовується той факт, що переміщенню оптичної системи на відстань  $\Delta L$  в кінцевому результаті відповідає деякий приріст фазового зсуву  $\Delta\varphi$ .

Мікропроцесорна реалізація фазометра для вимірювання великих фазових зсувів включає власне фазометр для вимірювання кута зсуву фаз в межах  $0^\circ \dots 360^\circ$  та пристрій підрахунку числа повних фазових циклів (періодів), і передбачає подальше відтворення повного фазового зсуву

$$\Phi = 2\pi N + \Delta\varphi.$$

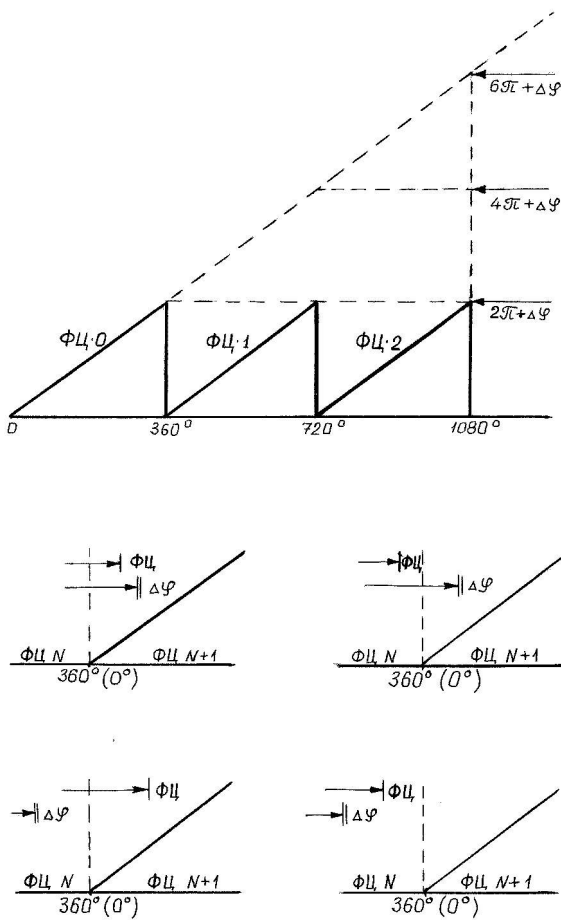


Рис. 1. Фазова характеристика та варіанти станів лічильників фазових циклів (ФЦ) і кута зсуву фаз ( $\Delta\varphi$ ) під час переходу з одного фазового циклу в інший

Такий алгоритм має суттєвий недолік — в околі границь періоду  $0, 2\pi, 4\pi, \dots$  можлива втрата одного фазового циклу (ФЦ) [2], що зумовлено скінченною точністю і роздільною здатністю вимірювання  $\Delta\varphi$ , а також неідентичністю каналів фазометра. Постає проблема ідентифікації вимірюваного кута зсуву фаз (КЗФ) з розрахованим за прогнозованою аналітичною залежністю  $\varphi^*$  від  $t$ .

Після вимірювання ФЦ та КЗФ їх необхідно проаналізувати попарно і значення числа ФЦ привести у відповідність з даними вимірювання  $\Delta\varphi$  так, щоб їх покази знаходились в одному і тому ж інтервалі.

На рис. 1 зображені варіанти можливих станів лічильників кількості ФЦ і КЗФ фазометра. У випадку а) обидва результати знаходяться на півплощині ФЦ  $N+1$  і загальний зсув фаз не потребує корекції. У випадку б)  $\varphi > 0^\circ$ , а пристрій підрахунку ФЦ під впливом деяких факторів не зафіксував перехід до ФЦ  $N+1$  і ми отримуємо результат з похибкою  $-1\PhiЦ$ . Тому правильний результат буде  $\Phi = 2\pi(N+1) + \Delta\varphi$ . Для випадку в) отримуємо похибку  $+1\PhiЦ$  і  $\Phi = 2\pi(N-1) + \Delta\varphi$ . Випадок г) корекції не потребує.

Алгоритм вимірювання накопичення фази двома незалежними пристроями накладає жорсткі вимоги на достовірність отриманих результатів так як помилка в 1ФЦ дає принципово невірний результат і тут без алгоритмів аналізу в реальному часі не обійтись.

Якщо значення  $\Delta\varphi$  ми прийемо за реально вимірюваний зсув фаз, а  $\varphi^*$  — за визначений аналі-

тично з врахуванням наближено відомої залежності  $\varphi^*$  від  $t$ , то сумарна похибка буде включати похибки вимірювального каналу та представлення функційної залежності.

### Корекція типу функційної залежності під час експрес-аналізу

Коли закон зміни деякого параметра відомий наближено, чи невідомий взагалі, його потрібно відновити, порівнюючи з відомими аналітичними залежностями. Найкраще наближення дають так звані адаптивні алгоритми ідентифікації. Їх використання дозволяє ставити задачу реалізації всієї апріорної і проміжної інформації про властивості об'єкта вимірювань, умови вимірювань, обмеження. Адаптивні алгоритми враховують результати допоміжних і робочих вимірювань, отримані до початку експерименту, співставляють проміжні результати з подальшою їх корекцією.

Серед адаптивних методів ідентифікації та обробки вимірювань слід відзначити методи: а) багаторазової фільтрації, б) допоміжної змінної, в) адаптивного одноразового ділення, г) ноніусний метод [3, 6, 7]. Їх загальний недолік: потреба складного математичного апарату для аналізу. Тому в практиці вимірювання змінюваних з часом параметрів доцільно використовувати спрощені часткові варіанти загальних методів, які разом з тим забезпечують прийнятні похибки. Саме різновид ноніусного метода реалізований при вимірюванні великих фазових зсувів. Під час ідентифікації та

аналізу за грубу шкалу прийнято кількість повних фазових циклів ( $N \ 360^\circ$ ), а для точнішої, коригуючої шкали вибирається кут зсуву фаз в межах фазового циклу ( $0^\circ \dots 360^\circ$ ).

Якщо функція зміни вимірюваного параметра, яку потрібно встановити (ідентифікувати), є неперервною (диференційованою), то її можна представити у вигляді багаточлена, розклавши в ряд Тейлора. При цьому задану точність забезпечує вибір відповідної кількості членів ряду.

Складність алгоритмів відновлення кривої за окремими відліками змушує вибирати для аналізу прості випадки і обмежуватись, наприклад, першим наближенням функції, вважаючи швидкість її зміни постійною і рівною значенню похідної, якщо  $t = t_i$ . При цьому отримуємо лінійну залежність  $\varphi$  від  $t$ . Коли ж  $[\varphi^*(t)]'$  — лінійно залежить від  $t$ , а  $[\varphi^*(t)]''$  — є постійною величиною, маємо квадратичну залежність і в формулі Тейлора необхідно врахувати вже друге наближення, що суттєво ускладнює аналіз. Алгоритми аналізу закону зміни функційної залежності  $\varphi^*(t)$  в реальному часі автору не зустрічалися взагалі.

Крім того, щоб окремі складові сумарної похибки вимірювань можна було додавати, вони повинні бути попередньо представлені своїми середніми квадратичними відхиленнями (СКВ)  $\sigma$ . Для незалежних випадкових параметрів  $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2}$  [4] (для цифрових фазометрів  $\sigma_i$  може характеризувати, наприклад, похибку дискретизації). Це дає можливість шляхом розрахунків виділяти похибки  $\sigma_i = \sqrt{\sigma^2 - \sigma_1^2 - \dots - \sigma_{i-1}^2 - \sigma_{i+1}^2 - \dots - \sigma_n^2}$ , і враховувати вагу окремих складових в загальній похибці. В подальших викладках основною характеристикою будемо вважати СКВ.

Визначимо основні методи наближеної ідентифікації форми графіка функції  $\Phi = \varphi(t)$ , придатні для експрес-аналізу вимірювань змінюваних з часом параметрів. Нехай від вимірювання до вимірювання будемо встановлювати форму функціональної залежності за методом лінійної інтерполяції. Тоді:

а) отримана ламана буде наближатись до графіка функції тим краще, чим меншим буде час одиничного вимірювання (а це пов'язано з тактовою частотою мікропроцесора). Коли випадкове розсіювання окремих вимірювань дуже незначне, ідентифікація полягає лише в підборі простих апроксимувальних функцій, зокрема степеневих, показникових чи дробово-раціональних;

б) якщо розсіювання даних значне, для експрес-аналізу доцільно використати метод виділення контуру границь смуги розсіювання і наближену форму функційної залежності визначати за точками центральної лінії смуги розсіювання даних;

в) коли обриси контуру розсіювання результатів неможливо ідентифікувати з відомими функціями, залишається лише умовний контроль шляхом визначення похилої прямої, проведеної через центр смуги, обмеженої окремими відліками.

### Аналіз точності вимірювання великих зсувів фаз

В практиці вимірювання КЗФ фазометр необхідно повірити шляхом вимірювання фазових зсувів, які змінюються з часом. Фаза в цьому випадку є монотонно зростаючою функцією і відхилення окремих значень від середнього не характеризує випадкову похибку вимірювання КЗФ [5]. Для визначення СКВ необхідно враховувати випадкове відхилення окремого вимірювання КЗФ від дійсного в даний момент.

Для визначення випадкової похибки вимірювання кута зсуву фаз з невідомим його істинним значенням оцінимо СКВ, використавши для аналізу три сусідніх результати  $\varphi_{i-1}$ ,  $\varphi_i$ ,  $\varphi_{i+1}$  (рис. 2). Обчислимо значення

$$\delta_i = \frac{\varphi_{i-1} + \varphi_{i+1}}{2} - \varphi_i,$$

або, використовуючи випадкові відхилення результатів вимірювань від дійсного значення  $\Delta_{i-1}$ ,  $\Delta_i$ ,  $\Delta_{i+1}$  і врахувавши, що  $\varphi_i = \varphi_i^* + \Delta_i$  отримаємо

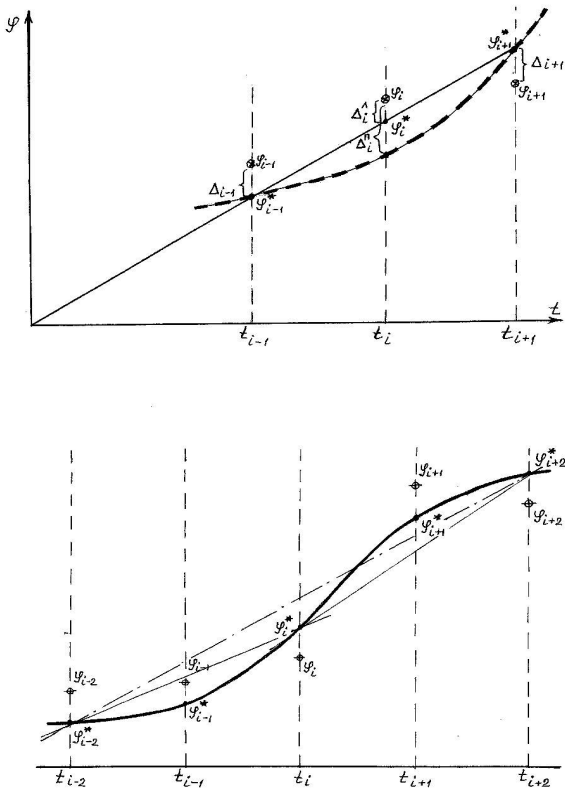


Рис.2. Оцінка похибки вимірювання великих фазових зсувів з різними законами їх зміни

$$\delta_i = \frac{(\varphi_{i-1}^* + \Delta_{i-1}) + (\varphi_{i+1}^* + \Delta_{i+1})}{2} - (\varphi_i^* + \Delta_i) = \frac{(\varphi_{i-1}^* + \varphi_{i+1}^*)}{2} - \varphi_i^* + \left( \frac{\Delta_{i-1} + \Delta_{i+1}}{2} - \Delta_i \right). \quad (2)$$

Якщо  $\varphi^*$  — монотонна (плавна) функція від  $t$  і вимірювання проводяться через рівні проміжки часу  $\Delta\tau$  так, що  $\tau_{i+1} - \tau_i = \Delta\tau = \text{const}$ , то, розкладаючи її в околі  $\tau_j$  в ряд, і враховуючи перше наближення отримаємо похибку

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{i-1}^* + \varphi_{i+1}^*}{2} - \varphi_i^* &= \delta_i^* = \\ &= \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 \varphi_i^*}{d\tau^2} \right|_{\tau=\tau_i} (\Delta\tau)^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Враховуючи (2) і (3)

$$\begin{aligned} \delta_i &= \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 \varphi_i^*}{d\tau^2} \right|_{\tau=\tau_i} (\Delta\tau)^2 + \\ &+ \left( \frac{\Delta_{i-1} + \Delta_{i+1}}{2} - \Delta_i \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Підсумувавши квадрати величини  $\delta_i$  по всіх  $i$ , крім  $i = 1$  і  $i = n$  (оскільки для них не можна знайти  $\delta_i$ ) отримуємо

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{n-1} \delta_i^2 &= \frac{1}{4} (\Delta\tau)^4 \sum_{i=2}^{n-1} \left( \left. \frac{d^2 \varphi_i^*}{d\tau^2} \right|_{\tau=\tau_i} \right)^2 + \frac{1}{4} \sum_{i=2}^{n-1} (\Delta_{i-1}^2 + \Delta_{i+1}^2) + \\ &+ \sum_{i=2}^{n-1} \Delta_i^2 + \frac{(\Delta\tau)^2}{2} \sum_{i=2}^{n-1} \left. \frac{d^2 \varphi_i^*}{d\tau^2} \right|_{\tau=\tau_i} (\Delta_{i-1} + \Delta_{i+1} - 2\Delta_i) - \sum_{i=2}^{n-1} \left( \Delta_{i-1}\Delta_i + \Delta_{i+1}\Delta_i - \frac{1}{2}\Delta_{i-1}\Delta_{i+1} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Якщо припустити, що всі випадкові відхилення  $\Delta$  розподілені нормально, то добутки  $\Delta_{i-1}\Delta_i$ ,  $\Delta_{i+1}\Delta_i$  будуть випадковими величинами, які з рівною ймовірністю приймають як додатні, так і від'ємні значення. Тому

$$\sum_{i=2}^{n-1} \Delta_{i-1}\Delta_i = 0, \quad \sum_{i=2}^{n-1} \Delta_i\Delta_{i+1} = 0, \quad \sum_{i=2}^{n-1} \Delta_{i-1}\Delta_{i+1} = 0, \quad \sum_{i=2}^{n-1} \left. \frac{d^2 \varphi_i^*}{d\tau^2} \right|_{\tau=\tau_i} (\Delta_{i-1} + \Delta_{i+1} - 2\Delta_{i-1}) = 0.$$

Для достатньо великих  $n$  можна вважати, що

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=2}^{n-1} ((\varphi_{i-1} - \varphi_{i-1}^*)^2)}{n-2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=2}^{n-1} \Delta_{i-1}^2}{n-2}} = \sigma, \quad \sqrt{\frac{\sum_{i=2}^{n-1} \Delta_{i+1}^2}{n-2}} = \sigma, \quad \sqrt{\frac{\sum_{i=2}^{n-1} \Delta_i^2}{n-2}} = \sigma,$$

тоді (5) перепишеться

$$\sum_{i=2}^{n-1} \delta_i^2 = \frac{2}{3} (n-2) \sigma^2 + \frac{(\Delta\tau)^4}{4} \sum_{i=2}^{n-1} \left( \left. \frac{d^2 \varphi_i^*}{d\tau^2} \right|_{\tau=\tau_i} \right)^2.$$

Якщо виконується умова

$$\frac{(\Delta\tau)^4}{4 \cdot \frac{3}{2}} \frac{\sum_{i=2}^{n-1} \left( \frac{d^2\varphi^*}{d\tau^2} \Big|_{\tau=\tau_i} \right)^2}{n-2} \ll \sigma^2, \quad (6)$$

то

$$\sum_{i=2}^{n-1} \delta_i^2 = \frac{2}{3}(n-2)\sigma^2.$$

Звідки

$$\sigma = \sqrt{\frac{2 \sum_{i=2}^{n-1} \delta_i^2}{3(n-2)}}. \quad (7)$$

Формула (7) дозволяє оцінити похибку вимірювання змінюваних з часом величин. Зі зростанням кількості вимірювань точність оцінки зростає.

Умова (7) з лінійною зміною  $\varphi^*$  виконується завжди. Якщо ж функцію  $\varphi^*$  можна апроксимувати квадратичною залежністю  $\varphi^* = k\tau^2$ , тоді

$$\frac{d\varphi^*}{d\tau} = 2k\tau, \quad \frac{d^2\varphi^*}{d\tau^2} = 2k = \text{const}$$

і (6) набуває вигляду

$$\frac{(\Delta\tau)^4}{3} k^2 \ll \sigma^2.$$

Іншим важливим параметром є кривизна графіка функції в точці  $\tau_i$  (див. рис. 2). Відомо, що в будь-якій точці кривої, де існує і неперервна друга похідна, можна обчислити кривизну за виразом

$$l = \frac{\frac{d^2\varphi^*}{d\tau^2}}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{d\varphi^*}{d\tau}\right)^2\right)^3}}.$$

Якщо  $\varphi^* = k\tau^2$  (функція опукла вниз), то кривизна буде

$$l = \frac{2k}{(1 + 4k^2\tau_i^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Якщо  $\varphi^* = \sqrt{2k\tau}$  (функція опукла вверх), то

$$l = -\frac{k^2}{(2k\tau_i + k^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Контролюючи кривизну, ми маємо можливість фіксувати точки перегину (моменти переходу від одного виду функціональної залежності до іншого). На рис. 2 проміжку  $\tau_{i-2} - \tau_i$  відповідає функція  $\varphi^* \cong k\tau^2$ ; проміжку  $\tau_i - \tau_{i+2}$  — функція  $\varphi^* \cong \sqrt{2k\tau}$ ,  $\tau_i$  — точка перегину.

Для лазерних вимірювань переміщень можна обмежитись цими двома випадками як найтипівшими. Однак для практики важливий загальніший випадок, коли вимірювану величину не можна апроксимувати лінійною або квадратичною залежністю. В цьому випадку, як впливає з рис. 2 і виразу (3), різниця дійсного і прогнозованого значень змінної  $\Delta_j^\Lambda$  в точці  $\tau_j$  буде

$$\gamma = \Delta_j^\Lambda = \frac{(\Delta\tau)^2}{2} \left. \frac{d^2\varphi^*}{d\tau^2} \right|_{\tau=\tau_j}.$$

Вона показує відхилення функції  $\varphi^*$  від лінійності на відрізку  $\tau_{i-1}, \tau_{i+1}$ , яке буде тим менше, чим ближче розміщені відліки один від одного. Значення  $\gamma$  повинно бути значно меншим відповідних випадкових відхилень і обмеження (6) набуває вигляду

$$\frac{(\Delta\tau)^4}{6} \left[ \left( \frac{d^2\varphi^*}{d\tau^2} \right)_{\max}^2 \right] \ll \sigma^2, \quad (8)$$

де  $\left[ \left( \frac{d^2\varphi^*}{d\tau^2} \right)_{\max}^2 \right]$  — максимальне значення другої похідної вимірюваної величини, всередині інтервалу  $\Delta\tau$ .

### Експериментальне підтвердження результатів

Підтвердженням отриманих алгоритмів і моделей є експериментальні дослідження двох типів фазометричних систем: лазерної системи контролю переміщень та восьмиканального ампліфазометра систем радіонавігації [8]. Як джерело вимірювальних сигналів використовувався програмований калібратор фазових зсувів, атестований в органах Держстандарту та калібратор фаз типу Ф 2-36 (Ф 1-4). Моделювались лінійна та квадратична залежності  $\Delta\varphi$  від  $t$ . Частота вхідних сигналів — 600 кГц, час вимірювання  $\Delta\tau = 100$  мкс. Систематична похибка вимірювального каналу  $\delta_\varphi = 0,261^\circ$ .

Фрагмент типової експериментальної залежності  $\Phi$  від  $t$  з лінійною функцією  $\varphi^*$

$\varphi_j^*$ (град)	0,26	20,26	40,26	60,26	80,26	90,26
$\varphi_j$ (град)	0,285	20,250	40,260	60,260	80,260	90,265
$\varphi_j^*$ (град)	100,26	120,26	140,26	160,26	180,26	200,26
$\varphi_j$ (град)	100,275	120,290	140,34	160,245	180,17	200,27
$\varphi_j^*$ (град)	220,26	240,26	260,26	270,26	280,26	300,26
$\varphi_j$ (град)	220,28	240,25	260,245	270,26	280,27	300,26
$\varphi_j^*$ (град)	320,26	340,26	360,26	380,26	400,26	420,26
$\varphi_j$ (град)	320,23	340,22	360,275	380,25	400,235	420,21

Значення фазового зсуву від калібратора фаз  $\varphi_0$  визначали тип функційної залежності з урахуванням  $\delta_\varphi$  —  $\varphi_j^* = \varphi_0 + \delta_\varphi$ . Значення СКВ  $\sigma_1$ , отримане за виразом (7) порівнювалось з  $\sigma_2$ , обчисленим безпосередньо за формулою (1) та  $\sigma$  розрахованим за виразом (за умови  $\Delta\varphi = \text{const}$ )

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\varphi_i - \bar{\varphi})^2 / (n-1)}, \quad (9)$$

де  $\bar{\varphi} = \sum_{i=1}^n \varphi_i / n$  математичне сподівання (середнє)  $n$  спостережень.

За розрахунками  $\sigma = 0,0245$ ,  $\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\varphi_i - \varphi_i^*)^2} = 0,0235$ ,  $\sigma_2 = 0,0281$  за виразом (7).

Аналітичний вираз (7) дозволяє визначити СКВ випадкової складової похибки вимірювання кутів зсуву фаз, що змінюються з часом.

### Висновки

Проаналізовані методи ідентифікації форми функційних залежностей з наближено відомими чи прогнозованими законами зміни вимірюваного параметра в системах реального часу. Встановлено, що з незначним розсіюванням даних (абсолютна похибка вимірювання накопичення фазового зсуву  $\delta_{\Phi} \leq 5^\circ$ ) для ідентифікації достатньо набору найпростіших апроксимуючих функцій — степеневих, показникових та дробово-раціональних.

Проведена оцінка похибки вимірювання великих зсувів фаз з лінійною та квадратичною функціями зміни загальної фази в лазерних вимірювальних системах. Отримані аналітичні вирази для обчислення СКВ при вимірюваннях змінюваних з часом величин з наближено відомим законом їх зміни дають абсолютну похибку  $\delta_{\sigma_2} = 0,0046^\circ$ .

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гульчак Ю. П., Голубев А. П., Календин В. В., Супьян В. Я., Троцишин И. В. Цифровой измеритель больших сдвигов фазы // Приборы и техника эксперимента. — 1987. — № 3. — С. 229—230.
2. Гупалов В. И. Динамические многоцикловые измерения фазового сдвига // Измерительная техника. — 1987. — № 4. — С. 41—43.
3. Wagdy M. F., Lucas M. S. P. Errors in sampled data phase measurement, IEEE Trans. of Instr. and Meas., — 1985. — Vol. 34. — № 34. — P. 507—509.
4. Новицкий П. В., Зограф И. А. Оценка погрешностей результатов измерений. — Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отделение, 1985. — 248 с.
5. Мейер А. А. Оценка погрешности измерений плавно изменяющихся величин // Измерительная техника. — 1984. — № 3. — С. 8—10.
6. Копейкин С. В. Адаптивные методы обработки измерений. Изд-во Саратов. ун-та, 1982. — 120 с.
7. Сильвестров А. И., Панченко О. М. Многократно адаптивные системы идентификации. — К.: Техніка, 1983. — 111 с.
8. Гульчак Ю. П. Разработка и исследование программно-аппаратных методов измерения временных параметров сигналов в устройствах фазометрических систем: Дис. ... канд. техн. наук. — В. — 1996. — 190 с.

Рекомендована кафедрою прикладної математики і обчислювальних систем

Надійшла до редакції 28.03.04  
Рекомендована до опублікування 1.10.03

**Гульчак Юрій Петрович** – доцент кафедри захисту інформації.  
Вінницький національний технічний університет