ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА КОМП'ЮТЕРНА ТЕХНІКА

УДК 681.325.5

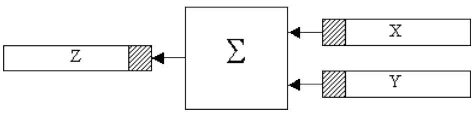
О. Д. Азаров, д. т. н., проф.;
О. І. Черняк,
Д. О. Черняк, студ.

ДОДАВАННЯ У СИСТЕМАХ ЧИСЛЕННЯ З АДИТИВНИМИ ТА МУЛЬТИПЛІКАТИВНИМИ СПІВВІДНОШЕННЯМИ МІЖ РОЗРЯДАМИ

Ефективна організація оброблення множинних потоків послідовних кодів передбачає використання надлишкових позиційних систем числення [1—5]. Основною їх перевагою є обмеженість довжини перенесення під час додавання, що дозволяє виконувати всі арифметичні операції у єдиному потоці, починаючи зі старших розрядів. Теоретично може існувати безліч таких систем числення, але не в усіх можливе обмеження довжини перенесення під час виконання арифметичних операцій.

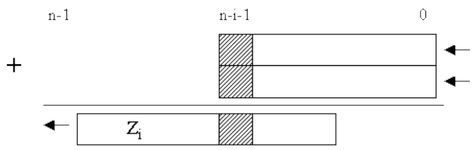
Авторами запропоновано клас надлишкових систем числення, що узагальнює відомі незнакорозрядні системи числення для порозрядного конвеєрного оброблення та дозволяє створювати нові системи числення з можливістю порозрядного виконання операцій, починаючи зі старших розрядів [6]. Цей клас названо АМ-системами числення. Розроблено і досліджено адитивні перетворення з перенесенням вліво і право (відповідно AL- та AR-перетворення), що виконують перенесення в запропонованих системах числення.

Метою даної статті є аналіз особливостей порозрядного конвеєрного додавання в АМ-системах числення та обґрунтування можливості обмеження перенесення у старші розряди під час виконання такого додавання.



Нехай потрібно знайти код суми Z, що дорівнює сумі кодів X і Y $X + Y = Z$. Порозрядне додавання кодів в АМ-системах числення виконується за відомим методом неавтономного оброблення [3] і являє собою послідовність кроків додавання окремих розрядів, починаючи зі старшого, на кожному з яких визначається код суми Z_i таким чином, що на останньому кроці він дорівнює коду суми Z.

На i-му кроці у додаванні беруть участь $(n - i - 1) - i$ розряди доданків. Під час виконання додавання чергових розрядів доданків виникає перенесення в інші розряди суми. Якщо основа системи числення не є цілою, то перенесення може бути як у старші, так і в молодші розряди. Сума Z_i у загальному випадку є кодом, що має ненульове значення як у молодших, так і в старших від $(n - i - 1)$-го розрядах.

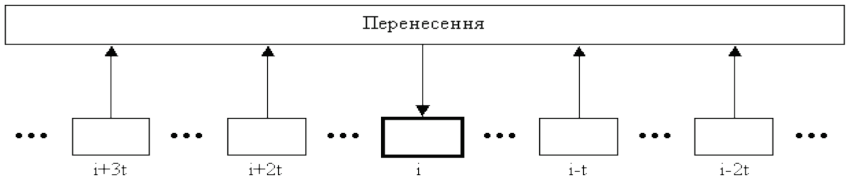


Визначення результату Z_i на кожному кроці відбувається шляхом додавання коду чергових розрядів до результату, отриманого на попередньому кроці:

$$Z_i = Z_{i-1} + x_i + y_i.$$

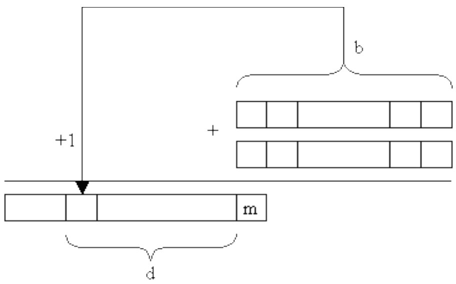
Слід зазначити, що оскільки AL- і AR-перетворення виконуються тільки над розрядами, розташованими один від одного на відстані, кратній t [6], то перенесення у будь-який i-й розряд може бути тільки з розрядів з номерами $(i \pm nt)$.

Отже, для визначення перенесення в i-й розряд потрібно аналізувати тільки ті молодші розряди, що мають номери $(i - nt)$ і тільки ті старші розряди, що мають номери $(i + nt)$, де $n = 1, 2, 3, \ldots$. Це дозволяє розглядати додавання у будь-якій АМ-системі числення з параметром адитивного співвідношення $t > 1$ як t незалежних додавань, кожне з яких виконується в АМ-системі числення з такими ж параметрами, але якщо $t = 1$. Тому для спрощення аналізу перенесення без обмеження узагальнень далі буде розглянуто тільки ті АМ-системи числення, що мають $t = 1$.



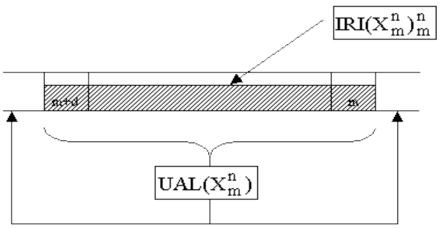
Особливістю додавання в АМ-системах числення є можливість обмеження розповсюдження перенесення у старші розряди за рахунок виконання універсального адитивного перетворення (UAL-перетворення) над групою розрядів на попередньому такті додавання [6]

$$Z_i = UAL(Z_{i-1} + (x_{n-1-i} + y_{n-1-i})\, w^{n-1-i}) .$$



Обмеження довжини перенесення у разі виконання додавання в АМ-системах числення зумовлене двома властивостями АМ-систем числення.

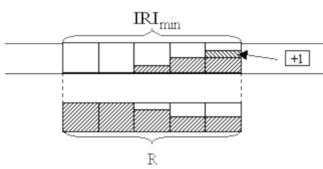
Перша властивість притаманна взагалі всім позиційним системам числення зі зростаючим рядом ваг розрядів. Вона є очевидною і полягає у тому, що результат додавання будь-якої групи розрядів не більший від одиниці деякого старшого по відношенню до неї розряду $\sum\limits_{i=m}^{b} 2\ c_{k-1}\ w^{m-i} \le w^{m+d}$.



Друга властивість притаманна тільки АМ-системам числення. Вона полягає у тому, що внаслідок виконання UAL-перетворення над певною кількістю розрядів їх значення менше від граничного. Різниця між максимально можливим значенням і отриманим після UAL-перетворення групи розрядів є інформаційним резервом для збільшення IRI цієї групи

$$IRI\left(X_m^n\right)_m^n = \sum_{i=m}^{m+n} c_{k-1}\ w^i - \left(UAL\left(X_m^n\right)\right)_m^n .$$

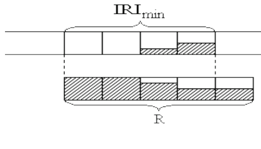
Мінімальне значення $IRI_{\min}$ деякої групи розрядів не залежить від коду в цій групі. Воно залежить тільки від адитивного співвідношення, максимальної цифри АМ-системи числення, і кількості розрядів у групі. Якщо кількість розрядів у групі дорівнює довжині адитивного співвідношення, то після виконання UAL-перетворення максимальний код буде меншим від граничного значення R на одиницю наймолодшого розряду групи. Тому значення $IRI_{\min}$ дорівнюватиме різниці між числом, утвореним максимальними цифрами у розрядах, і граничним значенням R збільшеній на одиницю наймолодшого розряду групи.



Отже, у цьому випадку $IRI_{\min}$ визначається виразом

$$IRI_{\min}\left(X_m^{\tau p}\right)_m^{\tau p} = w^m + \sum_{i=0}^{p}\left(c_{k-1} - r_{p-i}\right)\ w^{m+\tau p-\tau i} . \tag{1}$$

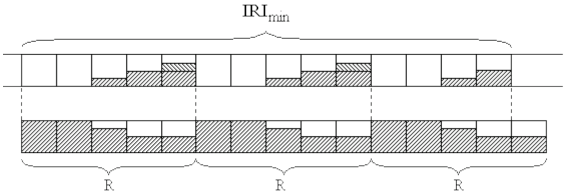
Якщо кількість розрядів у групі менша довжини адитивного співвідношення, то після виконання UAL-перетворення максимальний код буде дорівнювати відповідним розрядам граничного значення R. Тому значення $IRI_{\min}$ дорівнюватиме різниці між числом, утвореним максимальними цифрами у розрядах, і відповідними розрядами



ISSN 1997-9266. Вісник Вінницького політехнічного інституту. 2004. № 2

граничного значення *R*.

У цьому випадку $IRI_{\min}$ визначається виразом



$$IRI_{\min}\left(X_m^d\right)_m^d = \sum_{i=0}^{d}\left(c_{k-1} - r_{p-i}\right)\cdot w^{m+d-\tau i}. \quad (2)$$

Найзагальніший випадок — коли кількість розрядів у групі більша від довжини граничного значення.

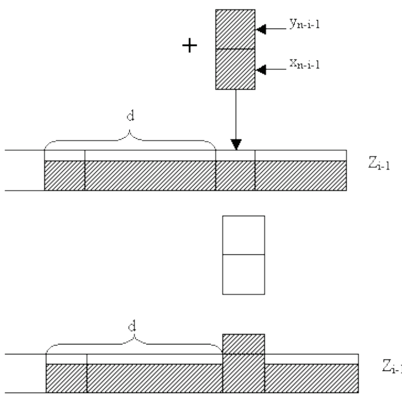
У цьому випадку вираз для обчислення $IRI_{\min}$ повинен об'єднувати як (1), так і (2):

$$IRI_{\min}\left(X_m^d\right)_m^d = \sum_{i=0}^{]d/\tau p[}\left(\left(w^{m+d-\tau p} + \sum_{j=0}^{p}\left(\left(c_{k-1} - r_{p-i}\right) w^{m+d-\tau j}\right)\right)\Big/ w^{i+\tau p}\right) + \\ + \sum_{i=0}^{](d \bmod \tau p)/\tau[}\left(\left(c_{k-1} - r_{p-i}\right) w^{m+d-]d/\tau p[\tau p-\tau i}\right).$$

Після виконання *UAL*-перетворення перенесення у розряди, молодші від *m*-го менше від одиниці *m*-го розряду. Тому $IRI_{\min}$ у розрядах, молодших від ($m + d + 1$)-го матиме значення

$$IRI_{\min}\left(X_m^d\right) > \sum_{i=0}^{]d/\tau p[}\left(\left(w^{m+d-\tau p} + \sum_{j=0}^{p}\left(\left(c_{k-1} - r_{p-i}\right) w^{m+d-\tau j}\right)\right)\Big/ w^{i+\tau p}\right) + \\ + \sum_{i=0}^{](d \bmod \tau p)/\tau[}\left(\left(c_{k-1} - r_{p-i}\right)\cdot w^{m+d-]d/\tau p[\cdot\tau p-\tau i}\right) - w^m. \quad (3)$$

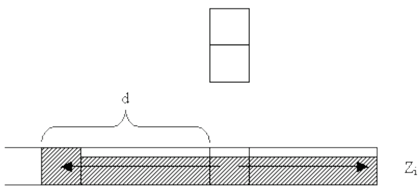
Як видно з даного виразу, зі збільшенням довжини *d* коду збільшується значення *IRI* цього коду відносно його *m*-го розряду. Тому для будь-якого значення перенесення в заданий розряд завжди можна за допомогою *UAL*-перетворення певної кількості розрядів коду попередньої суми отримати значення *IRI* не менше від числового значення перенесення. Отже, інформаційний резерв для збільшення затримує розповсюдження перенесення, що поступає в дану групу розрядів, якщо його значення не менше від значення перенесення.



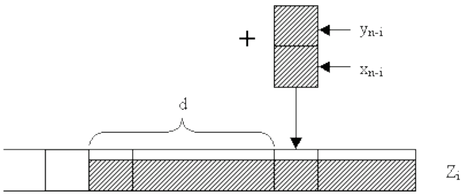
Визначення суми на кожному кроці порозрядного додавання здійснюється в декілька етапів. Нехай порозрядно додаються два *n*-розрядних коди X_0^n та Y_0^n. На ($i - 1$)-му кроці додавання над отриманим результатом Z_{i-1} виконується UAL-перетворення. Тому код Z_{i-1} містить інформаційний резерв для збільшення IRI, достатній для поглинання перенесення на *i*-му кроці. На *i*-му кроці виконується додавання чергових розрядів доданків x_{n-1-i} і y_{n-1-i} до отриманого на попередньому кроці коду проміжного результату Z_{i-1}. Дана операція може призвести до переповнення в ($n - 1 - i$)-му розряді.

Для усунення переповнення необхідно виконати UAL-перетворення коду результату, отриманого на *i*-му кроці

$$Z_i = UAL\left(Z_{i-1} + \left(x_{n-1-i} + y_{n-1-i}\right) w^{n-1-i}\right).$$



Усунення переповнення супроводжується виникненням перенесення, яке в загальному випадку може необмежено розповсюджуватися у старші розряди. Завдяки наявності інформаційного резерву для збільшення, що утворюється в результаті виконання *UAL*-перетворення проміжної суми на попередньому кроці додавання, перенесення поглинається цим резервом і не розповсюджується далі ніж на d розрядів. При цьому старший з цих розрядів може мати максимальне значення.



З іншого боку, виконання UAL-перетворення призводить до виникнення нового інформаційного резерву для збільшення, що може бути використаним на $(i+1)$-му кроці додавання.

Тому, починаючи з деякого i-го кроку порозрядного додавання перенесення через $(n-1-i+d)$-й розряд суми розповсюджуватись не буде.

Отже, результат Z_i можна поділити на дві частини: сталі старші розряди та змінні молодші розряди. Стала частина являє собою розряди коду результату ZC, а змінна частина є проміжною сумою T. Тобто

$$Z_i = ZC_i + T_i,$$

де $ZC_i = \left(Z_i\right)_{n-i+d-1}^{d}$; $T_i = \left(Z_i\right)_{n-i-b-1}^{d+b}$; d – довжина перенесення у старші розряди; b – довжина перенесення у молодші розряди.

З достатньою кількістю розрядів d на кожному кроці порозрядного додавання UAL перетворення потрібно виконувати тільки над проміжною сумою, отриманою на попередньому кроці, до якої додаються чергові розряди доданків. Перенесення через старший розряд проміжної суми, отриманої на попередньому кроці, розповсюджуватись не буде. Тому черговий розряд сталої частини суми утворюється додаванням перенесення, отриманого від чергового UAL-перетворення, до старшого розряду проміжної суми, отриманої на попередньому кроці

$$z_{n-i+d} = \left(UAL\left(T_{i-1} + \left(x_{n-1-i} + y_{n-1-i}\right) w^{n-1-i}\right)\right)_{n-i+d}^{0};$$

$$T_i = \left(UAL\left(T_{i-1} + \left(x_{n-1-i} + y_{n-1-i}\right) w^{n-1-i}\right)\right)_{n-i-b-1}^{d+b};$$

$$ZC_i = ZC_{i-1} + z_{n-i+d}.$$

Загальна структура пристрою для порозрядного додавання кодів чисел в АМ-системах числення, починаючи зі старших розрядів, показана на рис. 1.

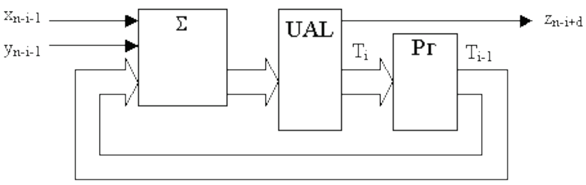


Рис. 1

Для спрощення зображення входи синхронізації і встановлення регістра у початковий стан тут не показано. Пристрій містить суматор кодів у заданій АМ-системі числення для додавання чергових розрядів доданків x_{n-i-1}, y_{n-i-1} та проміжної суми T_{n-i-1}, отриманої на попередньому такті; блок UAL для виконання UAL-перетворення результату додавання, генерування нової проміжної суми T_i і чергового розряду результату z_{n-i+d}; регістр Рг для використання проміжної суми T_i у наступному такті порозрядного додавання. Слід зазначити, що в конкретних реалізаціях можливе об'єднання суматора і блоку UAL в один блок оброблення з використанням різних схемотехнічних способів побудови цього блоку. Проте, у явному чи в неявному вигляді після додавання повинно виконуватись UAL-перетворення отриманої суми.

Максимальна довжина $l_{\max}$ перенесення у старші і в молодші розряди під час виконання порозрядного додавання визначає кількість оброблюваних на кожному кроці розрядів проміжного результату T_i і таким чином впливає на апаратні витрати в процесі розроблення суматорів. Значення $l_{\max}$ можна підбирати емпіричним шляхом, виконуючи порозрядне додавання у даній АМ-системі числення. Для заданого $l_{\max}$ будується таблиця переходів суматора. Стани суматора кодуються значенням T, починаючи з нульового. На основі попереднього значення T для всіх можливих комбінацій вхідних сигналів обчислюються нові значення T. Якщо якогось T немає в таблиці, то в ній дописується новий стан, що кодується цим T, а також значення чергового розряду суми z. Процес продовжується для кожного нового T до тих пір, доки всі T не почнуть повторюватись або доки не з'явиться переповнення в T чи в z. Якщо з'являється переповнення, то $l_{\max}$ збільшується на одиницю і знову повторюється процес побудови таблиці переходів. Цей процес має скінчену кількість кроків, оскільки для заданої АМ-системи числення значення $l_{\max}$ скінчене. Граф-схема алгоритму показана на рис. 2.

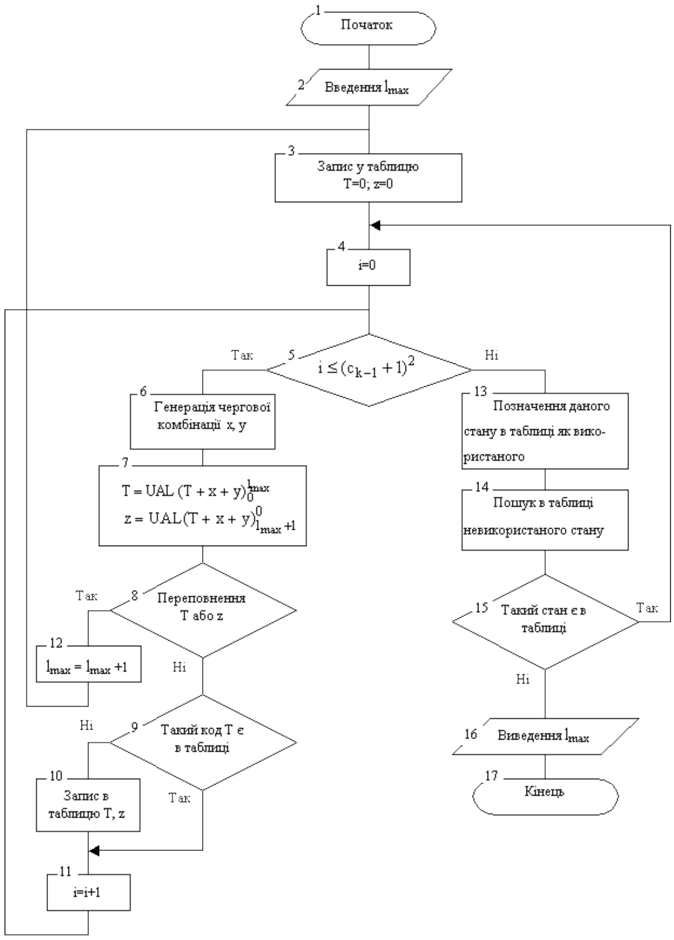


Рис. 2

Наведений алгоритм дозволяє для будь-якої АМ-системи числення шляхом ітерацій визначити максимальну довжину $l_{\max}$ перенесення під час виконання порозрядного додавання, починаючи зі старших розрядів. Початкове значення $l_{\max}$ при цьому можна задавати рівним одиниці. Для зменшення кількості ітерацій підбирання і для можливості порівняння довжин перенесення для різних АМ-систем числення необхідна можливість оцінки значення $l_{\max}$ без виконання наведеного алгоритму для кожної АМ-системи числення.

Висновки

1. Головною особливістю порозрядного додавання в АМ-системах числення є необхідність виконання універсального адитивного перетворення проміжного результату на кожному такті порозрядного додавання. Це створює інформаційний резерв для збільшення, що затримує розповсюдження перенесення у старші розряди і тим самим дозволяє виконувати додавання у конвеєрному режимі, починаючи зі старших розрядів.

2. Запропонована структурна схема порозрядного суматора. Ця схема у явному чи не в явному виді повинна містити пристрій для виконання універсального адитивного перетворення проміжного результату.

3. Запропоновано ітераційний алгоритм визначення довжини розповсюдження перенесення у старші розряди для довільної АМ-системи числення.

4. У будь-якій АМ-системі числення можливе конвеєрне порозрядне додавання, починаючи зі старших розрядів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Avizenis A. Binary-compatible signet-digit arithmetic. IN: AFIPS Conf Proc. — Vol. 26 — 1964. — P. 663.

2. Frougny Ch. On-line finite automata for addition in some numeration systems // Theoretical Informatics and Applications. — V. 33 (1999). — P. 79—101.

3. Самофалов К. Г., Луцкий Г. М. Основы построения конвейерных ЭВМ. — Киев: Вища школа, 1981. — 234 с.

4. Каляев А. В. Многопроцессорные системы с программируемой архитектурой. — М.: Радио и связь, 1984. — 240 с.

5. Черняк О. І., Азаров О. Д. Методи конвеєрної порозрядної обробки послідовних кодів золотої пропорції // Вісник ВПІ. — 1996. — № 1. — С. 14—17.

6. Азаров О. Д., Черняк О. І., Черняк П. О. Системи числення з адитивними та мультиплікативними співвідношеннями між вагами розрядів // Вісник ВПІ. — 2001. — № 1. — С. 58—64.

Рекомендована кафедрою обчислювальної техніки

Надійшла до редакції 4.11.03
Рекомендована до опублікування 17.11.03

Азаров Олексій Дмитрович — завідувач кафедри, ***Черняк Олександр Іванович*** — старший викладач.

Кафедра обчислювальної техніки. Вінницький національний технічний університет

Черняк Дмитро Олександрович — студент Інституту інформаційних технологій і комп'ютерної інженерії.

Вінницький національний технічний університет