УДК 517.9: 517.681

В. Я. Данилов, д. т. н., проф.;
О. Л. Жиров, к. т. н.;
О. П. Квасюк

АПОСТЕРІОРНІ МІНІМАКСНІ ОЦІНКИ ЯДРА ІНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Вступ

В даній статті продовжується дослідженя мініміксних оцінок ядра інтегрального оператора, результати яких опубліковано в [1]. Математична постановка задач апріорного та апостеріорного оцінювання ядра інтегрального оператора розглядається в [1—3] та, у необхідній мірі, нижче. Такі задачі виникають під час дослідження розподілів енергії в неперервному елементі антени. Точні розв'язки проблеми знаходження розподілу та його оцінок, наприклад амплітудно-фазового, відомі лише для обмеженої кількості випадків, а в умовах невизначеності проблема недостатньо вивчена. Отже, отримання апріорних та апостеріорних оцінок в умовах невизначеності (навіть простих видів розподілу, скажімо лише амплітудного) викликає певну складність і стає важливим, як саме-по-собі, так і слугує для оцінки інших видів розподілу. З метою покращення оцінок, отриманих в [1—2], використаємо теорію мінімаксного апостеріорного оцінювання [3].

Постановка задачі

Потрібно оцінити $a(\tau)$ по $x(t)$, $y(t)$ — входу та виходу системи

$$y(t) = \int_0^1 a(\tau)x(t-\tau)d\tau + f_1(t), \quad t \in [0, T], \quad \dot{a}(\tau) = f(\tau), \; \tau \in [0,1], \; a(0) = a(1) = 0,$$

якщо пара (f, f_1) належить області невизначеності G наступного виду:

$$(f, f_1) \in \left\{ \int_0^1 q_1(\tau) f^2(\tau) d\tau + \int_0^T q_2(t) \left[y(t) - \int_0^1 a\, x(t-\tau) d\tau \right]^2 dt \le 1 \right\},$$

$$f(\tau), q_1(\tau) \in C[0,1], \;\; q_1(\tau) \ge 0, \text{ існує } q_1^{-1}(\tau), \;\; f_1(t), q_2(t) \in C[0,T], \;\; q_2(t) \ge 0, \text{ існує } q_2^{-1}(t).$$

Розв'язок задачі

В [1—2] отримані системи рівнянь з яких знаходяться мінімаксні апріорні оцінки.

Для отримання апостеріорних оцінок будемо дотримуватись схеми побудови та позначень, введених в [3].

Розглянемо систему (1):

$$\begin{cases} -\dot{a}_\mu(\tau) = f_{1\mu}(\tau); \\ \dot{\hat{p}}_\mu(\tau) = \int_0^T q_2(t)\, x(t-\tau) \left[y(t) - \int_0^1 x(t-\tau)\, \hat{a}_\mu(s) ds \right] dt; \\ \hat{p}_\mu(0) = \hat{p}_\mu(1) = 0 \end{cases} , \qquad (1)$$

та введемо функціонал:

$$I(f_{1\mu}) = \int_0^1 a(\tau)l(\tau)d\tau + \frac{\mu}{2}\left[\int_0^T q_2(t)\left[y(t) - \int_0^1 x(t-\tau)\hat{a}_\mu(\tau)d\tau\right]^2 dt + \int_0^1 q_1(\tau)f_{1\mu}^2(\tau)d\tau\right].$$

Справедлива лема.

Лема 1. *Мінімум функціонала* $I(f_{1\mu})$ *досягається на функції*

$$\hat{f}_{1\mu}(\tau) = q_1^{-1}(\tau)\hat{p}_\mu(\tau) - \frac{1}{\mu}q_1^{-1}(\tau)\tilde{z}(\tau),,$$

де $\tilde{z}(\tau)$ — розв'язок крайової задачі $\frac{d}{dt}\tilde{z}(\tau) = l(\tau)$, $\tilde{z}(0) = \tilde{z}(1) = 0$.

Доведення. Візьмемо $\hat{a}_\mu + \varepsilon\tilde{a}_\mu$, де $\hat{a}_\mu$, $\tilde{a}_\mu$ є розв'язками системи (1). Тоді розв'язку $\hat{a}_\mu + \varepsilon\tilde{a}_\mu$ відповідає деякий елемент $f_{1\mu} = \hat{f}_\mu + \varepsilon\tilde{f}_\mu$.

Розглянемо доданки $I(f_{1\mu})$.

Похідна першого доданку, з урахуванням першого рівняння (1) та умови $\tilde{z}(0) = \tilde{z}(1) = 0$,

$$\frac{d}{d\varepsilon}\int_0^1 l(\tau)[\hat{a}_\mu(\tau) + \varepsilon\tilde{a}_\mu(\tau)]d\tau\Big|_{\varepsilon=0} = \int_0^1 l(\tau)\tilde{a}_\mu(\tau)d\tau = \int_0^1 \tilde{z}(\tau)\tilde{f}_{1\mu}(\tau)d\tau.$$

Похідну другого доданку $I(f_{1\mu})$ (послідовно враховуючи друге рівняння (1), умови $\hat{p}_\mu(0) = \hat{p}_\mu(1) = 0$ та перше рівняння (1)), отримуємо з ланцюжка рівностей

$$\frac{d}{d\varepsilon}\frac{\mu}{2}\int_0^T q_2(t)\left\{y(t) - \int_0^1 x(t-\tau)\left[\hat{a}_\mu(\tau) + \varepsilon\tilde{a}_\mu(\tau)\right]d\tau\right\}^2 dt\Bigg|_{\varepsilon=0} =$$

$$= -\mu\int_0^T\left\{q_2(t)\left[y(t) - \int_0^1 x(t-\tau)\hat{a}_\mu(\tau)d\tau\right]\int_0^1 x(t-s)\tilde{a}_\mu(s)ds\right\}dt =$$

$$= -\mu\int_0^1 \tilde{a}_\mu(s)\left\{\int_0^T x(t-s)q_2(t)\left[y(t) - \int_0^1 x(t-\tau)\hat{a}_\mu(\tau)d\tau\right]dtds = \right.$$

$$= -\mu\int_0^1 \tilde{a}_\mu(s)\dot{\hat{p}}_\mu(s)ds = \mu\int_0^1 \dot{\tilde{a}}_\mu(s)\hat{p}_\mu(s)ds = -\int_0^1 \tilde{f}_{1\mu}(s)\hat{p}_\mu(s)ds.$$

Третій доданок $I(f_{1\mu})$ має похідну

$$\frac{\mu}{2}\frac{d}{d\varepsilon}\int_0^1 q_1(\tau)\left[\hat{f}_{1\mu}(\tau) + \varepsilon\tilde{f}_{1\mu}(\tau)\right]^2 d\tau\Big|_{\varepsilon=0} = \mu\int_0^1 q_1(\tau)\hat{f}_{1\mu}(\tau)\tilde{f}_{1\mu}(\tau)d\tau.$$

Склавши три отриманих вирази і прирівнявши суму нулю, маємо

$$\int_0^1 \tilde{z}(\tau)\tilde{f}_{1\mu}(\tau)d\tau - \mu\int_0^1 \tilde{f}_{1\mu}(\tau)\hat{p}_\mu(\tau)d\tau + \mu\int_0^1 q_1(\tau)\hat{f}_{1\mu}(\tau)\tilde{f}_{1\mu}(\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^1 \tilde{f}_{1\mu}(\tau)\left[\tilde{z}(\tau) - \mu\hat{p}_\mu(\tau) + \mu q_1(\tau)\hat{f}_{1\mu}(\tau)\right]d\tau = 0.$$

Оскільки $\tilde{a}_\mu(\tau)$, через які визначаються $\tilde{f}_{1\mu}(\tau)$, довільні, то

$$\hat{f}_{1\mu}(\tau) = q_1^{-1}(\tau)\left(\hat{p}_\mu(\tau) - \frac{1}{\mu}\tilde{z}(\tau)\right).$$

Лема доведена.

Лема 2. *Мінімаксні апостеріорні оцінки, як розв'язок системи* (1) *з квадратичними обмеженнями, які задаються видом області невизначеності G, взаємозв'язані з апріорними оцінками такими співвідношеннями:*

$$\hat{a}_\mu = \hat{a} - \frac{1}{\mu} p, \tag{2}$$

$$p_\mu = \hat{p} - \frac{1}{\mu}(\hat{z} - \tilde{z}), \tag{3}$$

де $\tilde{z}$ *— розв'язок задачі*

$$\frac{d}{d\tau}\tilde{z}(\tau) = l(\tau),\ \tilde{z}(0) = \tilde{z}(1) = 0 .$$

Доведення. Для спрощення доведення леми використаємо властивості операторів в системах мінімаксного оцінювання [3, 4]. Згідно цих результатів, знаходження невідомих p, a, в системах мінімаксного апріорного оцінювання, зводиться до знаходження оберненого оператора для лінійного, обмеженого, самоспряженого оператора $(A^* Q_1 A + H^* Q_2 H)$, який природно виникає у разі явного розв'язування систем операторних рівнянь. Цей оператор є обернений і

$$\hat{a} = \left(A^* Q_1 A + H^* Q_2 H\right)^{-1} H^* Q_2 y, \qquad p = \left(A^* Q_1 A + H^* Q_2 H\right)^{-1} l,$$

а похідна від $I_\mu(f_1)$, прирівняна нулю, дає рівняння

$$l + \mu\left(A^* Q_1 A + H^* Q_2 H\right)\hat{a}_\mu - H^* Q_2 y = 0 .$$

Звідки $\qquad \hat{a}_\mu = -\frac{1}{\mu}\left(A^* Q_1 A + H^* Q_2 H\right)^{-1} l - \left(A^* Q_1 A + H^* Q_2 H\right)^{-1} H^* Q_2 y .$

Отже, з урахуванням явного виду $p,\ \hat{a}$, маємо $\hat{a}_\mu = \hat{a} - \frac{1}{\mu} p$, тобто виконується (2).

Доведемо справедливість (3). Виходячи з першої леми

$$\hat{f}_{1\mu}(\tau) = q_1^{-1}(\tau)\left(\hat{p}_\mu(\tau) - \frac{1}{\mu}\tilde{z}(\tau)\right).$$

З першого рівняння системи (1)

$$-\frac{d}{d\tau}a_\mu(\tau) = f_{1\mu} = q_1^{-1}(\tau)\hat{p}_\mu(\tau) - \frac{1}{\mu}q_1^{-1}(\tau)\tilde{z}(\tau) .$$

Враховуючи те, що

$$-\dot{\hat{a}}(\tau) = q_1^{-1}(\tau)\hat{p}(\tau) \text{ і } -\dot{p}(\tau) = q_1^{-1}(\tau)\hat{z}(\tau),$$

як раз і потрібно, щоб виконувалось (3). Дійсно, з попередньої частини леми

$$-\frac{d}{d\tau}a_\mu(\tau) = -\frac{d}{d\tau}(\hat{a} - \frac{1}{\mu}p) = \dot{\hat{a}} - \frac{1}{\mu}\dot{p} = q_1^{-1}\hat{p} - \frac{1}{\mu}q_1^{-1}\hat{z} \pm \frac{1}{\mu}q_1^{-1}\tilde{z} = q_1^{-1}p_\mu - \frac{1}{\mu}q_1^{-1}\tilde{z}. .$$

Звідки отримуємо (3). Лема доведена.

Лема 3. *Множник* μ*, що визначається з умови досяжності мінімуму функціонала* $I_\mu(f_{1\mu})$ *на границі* G*, виражається формулою*

$$\mu = \pm\left[1 - \alpha(\hat{a},\ \tilde{y})\right]^{-\frac{1}{2}}\left[\int_0^1 l(\tau)p(\tau)d\tau\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Доведення. Функціонал $I_\mu(f_{1\mu})$ — випуклий, тому мінімум його досягається на границі області G. Це дає нам право записати рівність

$$\int_0^1 q_1(\tau) f_{1\mu}^2(\tau)\, d\tau + \int_0^T q_2(t)\left[y(t) - \int_0^1 \hat{a}_\mu(\tau) x(t-\tau)\, d\tau\right]^2 dt = 1\,. \qquad (4)$$

По доведеному перший доданок лівої частини (4)

$$\int_0^1 q_1(\tau)\dot{a}_\mu(\tau)\, d\tau = \frac{1}{\mu^2}\int_0^1 q_1(\tau)\dot{p}^2(\tau)\, d\tau - \frac{2}{\mu}\int_0^1 q_1(\tau)\dot{p}(\tau)\dot{\hat{a}}(\tau)\, d\tau + \int_0^1 q_1(\tau)\dot{\hat{a}}^2(\tau)\, d\tau. \qquad (5)$$

Далі розглянемо другий доданок (4). Спочатку запишемо представлення виразу

$$y(t) - \int_0^1 \hat{a}_\mu(\tau) x(t-\tau)\, d\tau = \int_0^1 \hat{a}(\tau) x(t-\tau)\, d\tau + \frac{1}{\mu}\int_0^1 p(\tau) x(t-\tau)\, d\tau = \tilde{y}(t) + \frac{1}{\mu}\int_0^1 p(\tau) x(t-\tau)\, d\tau.$$

Тоді другий доданок (4) рівний

$$\int_0^T q_2(t)\tilde{y}^2(t)\, dt + \frac{2}{\mu}\int_0^T q_2(t)\tilde{y}(t)\int_0^1 p(\tau) x(t-\tau)\, d\tau\, dt + \frac{1}{\mu^2}\int_0^T q_2(t)\left[\int_0^1 p(\tau) x(t-\tau)\, d\tau\right]^2 dt. \qquad (6)$$

У свою чергу перетворимо другий доданок виразу (6), використовуючи апріорні оцінки, отримані в [1—2]

$$\frac{2}{\mu}\int_0^T q_2(t)\tilde{y}(t)\int_0^1 p(\tau) x(t-\tau)\, d\tau\, dt = \frac{2}{\mu}\int_0^1\int_0^T q_2(t)\tilde{y}(t) x(t-\tau)\, dt\, p(\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{2}{\mu}\int_0^1\int_0^T q_2(t)\left[y(t) - \int_0^1 \hat{a}(s) x(t-s)\, ds\right] x(t-\tau)\, dt\, p(\tau)\, d\tau = \frac{2}{\mu}\int_0^1 \hat{p}(\tau) q_1^{-1}(\tau)\hat{z}(\tau)\, d\tau\,.$$

Останній вираз рівний другому доданку (5), взятому з протилежним знаком, так як

$$\int_0^1 q_1(\tau)\dot{p}(\tau)\dot{\hat{a}}(\tau)\, d\tau = -\int_0^1 q_1(\tau) q_1^{-1}(\tau)\hat{z}(\tau)\dot{\hat{a}}(\tau)\, d\tau = -\int_0^1 \dot{\hat{a}}(\tau) z(\tau)\, d\tau = \int_0^1 q_1^{-1}(\tau)\hat{p}(\tau)\dot{\hat{z}}(\tau)\, d\tau\,.$$

Отже (4) ми привели до вигляду

$$\frac{1}{\mu^2}\int_0^1 q_1(\tau)\dot{p}^2(\tau)\, d\tau + \int_0^1 q_1(\tau)\dot{\hat{a}}^2(\tau)\, d\tau + \frac{1}{\mu^2}\int_0^T q_2(t)\left[\int_0^1 p(\tau) x(t-\tau)\right]^2 dt + \int_0^T q_2(t)\tilde{y}^2(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\mu^2}\left\{\int_0^1 q_1(\tau)\dot{p}^2(\tau)\, d\tau + \int_0^T q_2(t)\left[\int_0^1 p(\tau) x(t-\tau)\, d\tau\right]^2 dt\right\} + \int_0^1 q_1(\tau)\dot{\hat{a}}^2(\tau)\, d\tau + \int_0^T q_2(t)\tilde{y}^2(t)\, dt = 1\,.$$

Вираз у фігурних дужках рівний похибці апріорного оцінювання $\int_0^1 l(\tau) p(\tau)\, d\tau$, отриманої в [2]. Дійсно, якщо перше рівняння першої системи в [2] домножити на $p(\tau)$ та проінтегрувати на [0, 1], тоді

$$\int_0^1 p(\tau)\dot{\hat{z}}(\tau)\, d\tau = p(\tau)\hat{z}(\tau)\Big|_0^1 - \int_0^1 \dot{p}(\tau)\hat{z}(\tau)\, d\tau = \int_0^1 q_1(\tau)\dot{p}^2(\tau)\, d\tau\,.$$

Введемо позначення $\alpha(\hat{a}, \tilde{y}) = \int_0^1 q_1(\tau)\dot{\hat{a}}^2(\tau)\, d\tau + \int_0^T q_2(t)\tilde{y}^2(t)\, dt.$

Отже, з припущення про область G, виконується нерівність $\alpha(\hat{a}, \tilde{y}) \le 1$ і, з рівності

$$\frac{1}{\mu}\int_0^1 l(\tau)p(\tau)\,d\tau + \alpha(\hat{a},\tilde{y}) = 1,$$

знаходимо $\dfrac{1}{\mu} = \pm\left[1-\alpha(\hat{a},\ \tilde{y})\right]^{1/2}\left[\int_0^1 l(\tau)p(\tau)\,d\tau\right]^{-1/2}$.

Лема 3 доведена.

Очевидним наслідком доведених лем 1—3 є наступна теорема.

Теорема. *Апостеріорна мінімаксна оцінка* $\hat{\hat{L}}(a)$ *лінійного функціонала*

$$L(a) = \int_0^1 a(\tau)l(\tau)\,d\tau$$

від ядра інтегрального оператора має вигляд

$$\hat{\hat{L}}(a) = L(\hat{a}_\mu) = \int_0^1 l(\tau)\hat{a}_\mu(\tau)\,d\tau = \int_0^1 l(\tau)\hat{a}(\tau)\,d\tau - \frac{1}{\mu}\int_0^1 l(\tau)p(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_0^1 l(\tau)\hat{a}(\tau)\,d\tau \pm \left[1-\alpha\left(\hat{a},\ \tilde{y}\right)\right]^{1/2}\left[\int_0^1 l(\tau)p(\tau)\,d\tau\right]^{1/2}.$$

Наслідок. *Похибка оцінювання у разі мінімаксного апостеріорного оцінювання не більша від похибки у разі мінімаксного апріорного оцінювання.*

Доведення наслідку ґрунтується на тому, що, при виконанні вказаних умов, похибка апостеріорного оцінювання отримується домноженням похибки апріорної оцінки на коефіцієнт $\left[1-\alpha\left(\hat{a},\tilde{y}\right)\right]$. Причому, оскільки $0 \le \alpha(\hat{a},\tilde{y}) \le 1$, то і $0 \le [1-\alpha(\hat{a},\tilde{y})] \le 1$.

Висновки

У разі виконання в постановці задачі умов, отримані в даній роботі апостеріорні оцінки ядра інтегрального оператора не можуть бути гіршими від апріорних. Звичайно, що це бажана властивість для будь-якого методу апостеріорного оцінювання. В роботі вказані явні залежності між апріорними й апостеріорними оцінками та відповідними похибками оцінювання. Показано, що апостеріорні оцінки можуть отримуватись введенням компенсаційних поправок до апріорних. Також слід зазначити, що поправки знаходяться через розв'язки однотипних (із системами апріорного оцінювання) рівнянь, тими ж чисельними методами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Жиров О. Л. Аналіз амплітудного розподілу гідроакустичної антени в умовах невизначеності. Вісник ВПІ. — 2000. — № 6 — С. 104—106.

2. Жиров О. Л. Мінімаксні оцінки ядра інтегрального оператора. Праці П'ятої Української конференції з автоматичного управління «Автоматика-98»: Київ, 13—16 травня 1998 р. — Київ: вид-во НТУУ «Київський політехнічний інститут», 1998, — ч. I — С. 38—44.

3. Бублик Б. Н., Данилов В. Я., Наконечный А. Г. Некоторые задачи наблюдения и управления в линейных системах. — Киев: УМК ВО, 1988. — 191 с.

4. Жиров О. Л. Властивості систем мінімаксного оцінювання розв'язків лінійних операторних рівнянь. Міжнародна конференція «Моделювання та оптимізація складних систем» (МОСС-2001). Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, Київ, 25—28 січня 2001 р., Праці конференції, Том I. С. 24—26.

Рекомендована кафедрою інтелектуальних систем

Надійшла до редакції 22.05.03
Рекомендована до друку 23.02.04

Данилов Валерій Якович – професор, ***Жиров Олександр Леонідович —*** доцент, ***Квасюк Олександр Пилипович —*** науковий співробітник.

Науково-навчальний комплекс «Інститут прикладного системного аналізу» НАНУ і Міністерства освіти і науки України при Національному технічному університеті України «КПІ»