УДК 681.5.017

С. М. Москвіна, к. т. н., доц.;
Т. О. Голубєва, студ.

АНАЛІЗ АЛГОРИТМІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЖОРСТКИХ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ У ПАКЕТАХ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Вступ

Все різноманіття динамічних процесів в системах автоматичного керування (САК) зазвичай описуються системами диференційних рівнянь (СДР), наприклад, системи автоматичного регулювання швидкості, системи управління рульовими приводами з лінійними та нелінійними корегувальними пристроями тощо. Під час розробки таких САК одним з найважливіших етапів є математичне моделювання, за допомогою якого аналізується стійкість систем, обираються параметри для обчислення оптимальних динамічних характеристик таких систем та корегуються проектні рішення. На даний час для розв'язання задач моделювання актуальною є проблема розроблення пакетів моделювання САК. Відомі пакети моделювання, такі як ДИСПАС, МАС, MODOS, MatLab, DCNET, MathCad дозволяють моделювати як лінійні, так і нелінійні САК [1], але не розв'язують проблем, які виникають під час моделювання на ЕОМ систем жорстких диференційних рівнянь. Дана стаття присвячена аналізу шляхів вирішення цієї проблеми.

Аналіз проблеми

Розробники САК під час складання математичних моделей нехтують багатьма властивостями реальних фізичних систем, за рахунок чого отримують спрощену математичну модель. Ступінь ідеалізації математичних моделей залежить від багатьох факторів: характеру та величини діючих завад; точності апроксимації статичних характеристик; виправданості заміни розподілених параметрів зосередженими; ступеня визначення малих параметрів тощо. Але для адекватного опису реальних фізичних перехідних процесів неможливо повністю знехтувати незначними шкідливими процесами, які супроводжують основний (наприклад, шуми та завади) та призводять до того, що у системі диференційних рівнянь, що описують динаміку САК, одночасно задіяні в будь-якій точці відрізку спостереження складові функції системи, що швидко спадають, з великими та малими похідними [2], наприклад, так, як показано на рис. 1. Такі системи відомі як жорсткі [2], а вказані проблеми спричиняють появу спеціальних чисельних методів для розв'язання цих систем на ЕОМ.

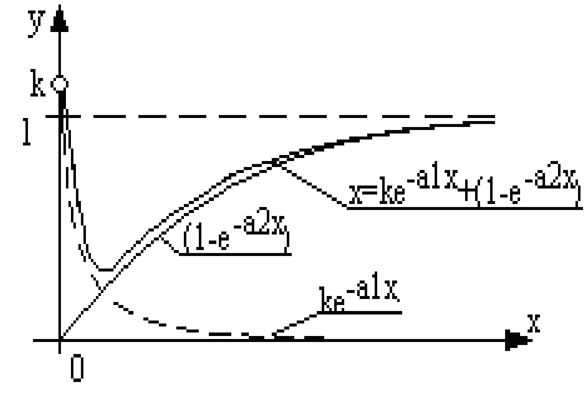

Рис.1. Розв'язок жорсткої системи, що складається з «швидко» компоненти ($ke^{-x\,a1}$) та «повільної» компоненти ($1-e^{-x\,a2}$) [3]

Мета даної роботи полягає у тому, щоб на основі досліджень і аналізу традиційних методів чисельного розв'язання СДР, вибрати такий метод та алгоритм, побудований на його основі, який можна використовувати для розв'язання як СДР, так і систем жорстких диференційн их рівнянь (СЖДР) в пакетах програм моделювання САК, в яких ця задача є частиною всього комплексу задач моделювання і дослідження САК на ЕОМ. Така постановка обумовлена тим, що в сучасних пакетах програм, що використовуються для моделювання САК, зазвичай не враховуються методи розв'язання СЖДР. Якщо ж такі методи наявні, наприклад, в пакеті програм MathCad, то для розв'язання аналогічного класу задач чисельними методами від проектувальника САК потрібно додаткові знання специфіки використовуваного математичного апарату.

Постановка задачі на моделювання СЖДР

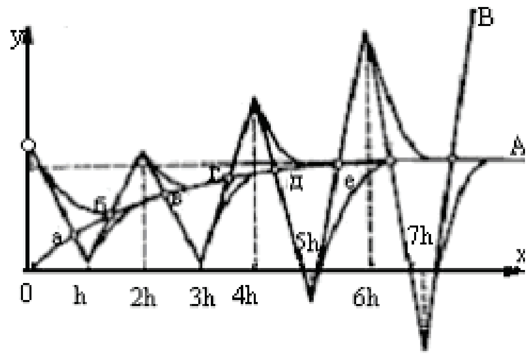

Рис. 2. Графічна ілюстрація стійкості чисельного методу розв'язання СЖДР

В зв'язку з тим, що об'єктом дослідження є чисельні методи та алгоритми розв'язання СЖДР, розглянемо поняття стійкості чисельних методів тому, що це є основним питанням в процесі вибору чисельного алгоритму розв'язання СЖДР. Будемо використовувати поняття стійкості [4]: чисельний метод вважається стійким, якщо результати розв'язання неперервно залежать від вхідних параметрів задачі та похибка чисельного розв'язку ε залишається обмеженою з заданими значеннями зміни параметра диференціювання методу.

Графічно поняття стійкості для класу задач, що розглядаються, можна проілюструвати рисунком 2 [3], де кривою А зображено аналітичний розв'язок жорсткого диференційного рівняння, а кривою В зображено отриманий чисельний розв'язок. З рис. 2 видно, що зі збільшенням незалежного параметра диференціювання *x,* відхилення чисельного розв'язку від аналітичного збільшується і виходить за межі дозволеної похибки ε.

В процесі дослідження будемо вважати ефективним такий метод розв'язання СЖДР, який забезпечуватиме необхідну стійкість розв'язку зі значним діапазоном зміни кроку інтегрування. Саме тому подальше дослідження розглядуваних методів орієнтоване на аналіз розв'язку СЖДР із варіюванням кроку інтегрування.

Подамо *загальну постановку задачі*: проаналізувати та вибрати метод чисельного розв'язання на ЕОМ системи з n жорстких диференційних рівнянь вигляду $\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $i = \overline{1, n}$ на відрізку дослідження $[x_0,\ x_0 + a]$ із заданими початковими умовами $y_i(x_0) = y_{i_0}$, $i = \overline{1, n}$, де $y_i(x)$ — i-й розв'язок системи диференційних рівнянь (для зручності міркувань під $y(x)$ будемо розуміти $y_i(x)$); $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — похідна від функції $y_i(x)$.

Порівняння чисельних методів розв'язання СЖДР проведемо на відомій [4], з точки зору складності отримання чисельного розв'язку на ЕОМ, системі:

$$\begin{cases} y_2' = 1996 y_2 + 3996 y_1; \\ y_1' = -1998 y_2 - 3998 y_1 \end{cases} \qquad (1)$$

на відрізку дослідження [0, 0,02] з точністю e = 0,0001. Аналітичний розв'язок цієї системи Y_analit_1 та Y_analit_2 (рис. 3) має вигляд

$$y_1 = 3e^{-2000x} - 2e^{-2x} \quad \text{та} \quad y_2 = -3e^{-2000x} + 4e^{-2x}.$$

Аналіз відомих методів моделювання СЖДР

Методи Рунге–Кутта

Спочатку розглянемо явні методи Рунге–Кутта на прикладі задачі.

На рис. 3 проілюстровані результати чисельного дослідження системи (1) з різними значеннями кроку інтегрування h. Так, наприклад, функція RG_10 відповідає чисельному розв'язку досліджуваної СЖДР з h = 0,001; RG_15 — з h = 0,0015; RG_20 — з h = 0,002; RG_50 — з h = 0,005. Порівнюючи ці функції, бачимо, що для даної системи використання кроку інтегрування в межах $0{,}1 \le h \le 0{,}0001$ не дозволяє знайти розв'язок СЖДР, бо вже у початкових двох, трьох точках чисельний розв'язок суттєво розходиться з аналітичним (функція Y_analit_1, рис. 3), причому його порядок швидко зростає до 10^{94-123}. Це пояснюється тим, що метод Рунге–Кутта є нестійким. Але зменшення кроку інтегрування h дозволяє отримати результати (функція RG 10, рис. 3), які відповідають аналітичним, при цьому значно збільшується кількість отриманих значень розв'язку, що може призвести до переповнення динамічних структур зберігання даних в пакетах моделювання САК.

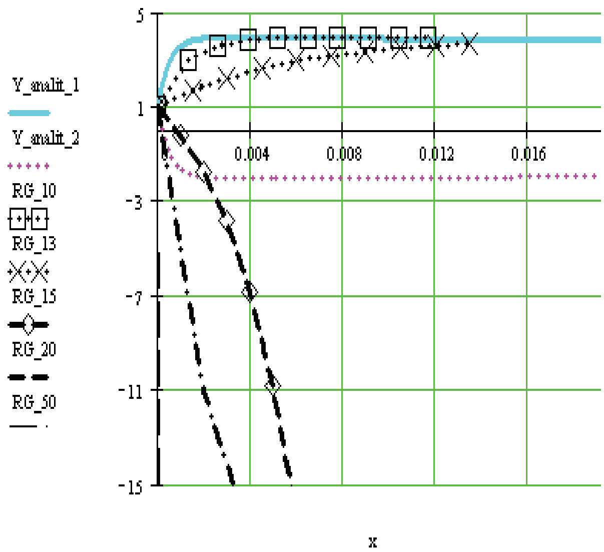

Рис. 3 Графічна модель аналітичного розв'язку системи (1) та її розв'язання методом Рунге–Кутта

Таким чином, ефективність явних методів Рунге–Кута залежить від вигляду досліджуваної СЖДР і значення кроку інтегрування h. Для вирішення поставленої задачі це є небажаним, тому що відрізок дослідження і крок інтегрування, як правило, визначається у разі розв'язання всієї сукупності задач, які необхідно вирішити, моделюючи САК в середовищі пакету програм.

Явні методи Гіра

Для моделювання СЖДР звичайно використовують [2, 3] методи Гіра k-го порядку, які забезпечують зміну величини кроку в широкому діапазоні, зберігаючи при цьому стійкість в процесі обчислень. Математична модель методів Гіра має вигляд

$$y_{n+1} = a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \ldots + a_{k-1} y_{n-k+1} + h\left[b_{-1} f\left(y_{n+1}, x_{n+1}\right)\right], \tag{2}$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} (-i)^j a_i + j b_{-1} = 1, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, k-1. \tag{3}$$

де $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ — коефіцієнти методу Гіра, які знаходяться за відомими формулами, b_{-1} — вільний коефіцієнт, h — крок інтегрування, k — порядок методу, $f(y_{n+1}, x_{n+1})$ — похідна шуканої функції в $n + 1$ точці, x — змінна інтегрування.

Дослідження на ЕОМ показали [2], що чим вище порядок методу Гіра, тим більша точність методу, але менша його стійкість [3], тому під час вибору алгоритму розв'язання СЖДР потрібно знаходити компроміс між стійкістю та точністю чисельного розв'язку. Виходячи з того, що метод Гіра нижчих порядків є найстійкішим, будемо у дослідженні СЖДР використовувати методи 1-го або 2-го порядків.

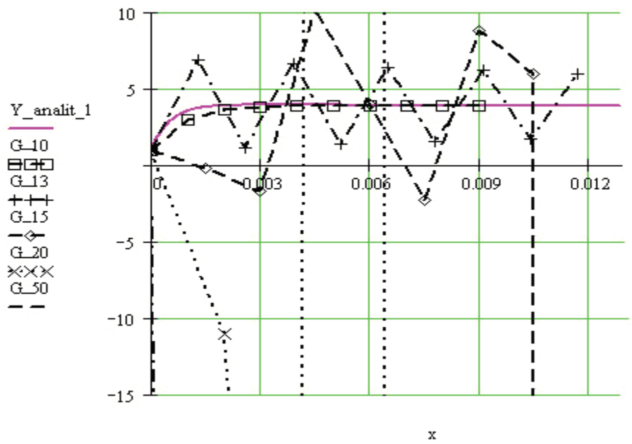

Рис. 4 Графічне представлення розв'язання СЖДР методами Гіра

Результати тестування СЖДР (1) за методом Гіра 1-го порядку проілюстровано на рис. 4, де Y_analit_1 — аналітичний розв'язок цієї СЖДР для y_1; G_10, G_13, G_15, G_20, G_50 — розв'язки СЖДР (1) для y_1, отримані за допомогою методів Гіра з різним кроком інтегрування (більше значення індексу, що позначає функцію розв'язку, відповідає більшому значенню кроку

h). Як видно з рис. 4, отримати стійкий чисельний розв'язок (крива G_10) максимально близький ($\varepsilon = 0{,}0001$) до аналітичного Y_analit_1 можна шляхом варіюванням значення кроку h, але при цьому отримана значно більша кількість точок, ніж передбачалось умовою задачі, і, крім того, не на всьому заданому відрізку дослідження. Осциляції значень чисельних розв'язків G_15, G_20, G_50 відносно аналітичного Y_analit_1, вказують на нестійкість алгоритму.

Отже, якщо використовувати явні методи Гіра для дослідження динаміки САК в середовищі спеціалізованих пакетів моделювання, то в випадку, коли динаміка САК описується СЖДР, виникає дві проблеми: по-перше, залежність явних методів Гіра від кроку інтегрування h, оптимальне значення якого залежить від досліджуваної СЖДР та визначається експериментальним шляхом; по-друге — неможливість отримати чисельний розв'язок на всьому відрізку дослідження, а отже, користувач може отримати неповну картину динаміки поведінки САК.

Неявні методи Гіра

Розглянемо два відомих неявних методи, що вдосконалюють методи Гіра: 1) алгоритм корекції із застосуванням матриці Якобі; 2) алгоритм корекції із застосуванням вектора Нордсика [3]. Обидва алгоритми теоретично дозволяють врахувати та виправити вище розглянуті недоліки.

Розглянемо перший алгоритм корекції, який використовує рекурентну формулу

$$y_{n+1}^{j+1} = y_{n+1}^{j} + b\left[1 - hbJ_f\left(y_{n+1}^{j}, x_{n+1}\right)\right]^{-1}\left[h\dot{y}_{n+1}^{j} - d_{n+1}^{j}\right],$$

де k — порядок методу Гіра, j — номер ітерації, на $n + 1$ кроці корекції, J — матриця Якобі, b — вільний член, d — матриця, що має вигляд

$$d_{n+1}^{j+1} = d_{n+1}^{j} + \left[1 - hbJ_f\left(y_{n+1}^{j}, x_{n+1}\right)\right]^{-1}\left[h\dot{y}_{n+1}^{j} - d_{n+1}^{j}\right].$$

Але враховуючи те, що даний метод використовує матрицю Якобі, тим самим передбачається втручання зовні в процес моделювання для знаходження часткових похідних тому, що матриця Якобі залежить від функцій, які описують праві частини СЖДР. Через це даний алгоритм не може бути використаний у пакетах програм, для яких процес розв'язання СДР не передбачає втручання зовні і є лише проміжною ланкою повної задачі моделювання САК. Аналогічний висновок можна зробити по другому алгоритму корекції, який використовує вектор Нордсика, що також базується на матриці Якобі.

Методи з автоматичною зміною кроку

Для дослідження СЖДР існує група спеціальних методів з автоматичним вибором кроку. В [6] проводиться аналіз алгоритмів таких методів, які використовуються в пакеті програм MathCad (наприклад, rkadapt [5]), результати якого показали, що чисельний розв'язок СЖДР отримується не на всьому відрізку дослідження, а лише на певній його частині, причому отримується велика кількість значень (за рахунок варіювання кроку), що призводить до переповнення програмних структур. На наш погляд, це є найвагоміший недолік методів, що розглядаються.

Для розв'язання задачі, що розглядається, в роботі пропонується використовувати алгоритм з автоматичним вибором кроку як в сторону зменшення, так і в сторону збільшення, в залежності від виду розглядуваних функцій та фільтруванням отриманих значень розв'язку в процесі моделювання за заданим критерієм. Алгоритм фільтрації базується на відкиданні тих значень розв'язку, які є проміжними відповідно до заданого кроку інтегрування.

На рис. 5 показані результати чисельного дослідження запропонованого алгоритму, де Y_analit_1 — аналітичний розв'язок СЖДР розглядуваної задачі (1) y_1; Y_avt — розв'язок СЖДР (1) y_1 на основі запропонованого алгоритму; Y_sort — розв'язок СЖДР (1) y_1 на основі запропонованого алгоритму з фільтруванням зайвих значень розв'язку. З рис. 5 видно, що даний алгоритм дозволяє отримати значення розв'язку близьке до аналітичного в межах заданої точності та дає кількість значень, яка наближається до заданої.

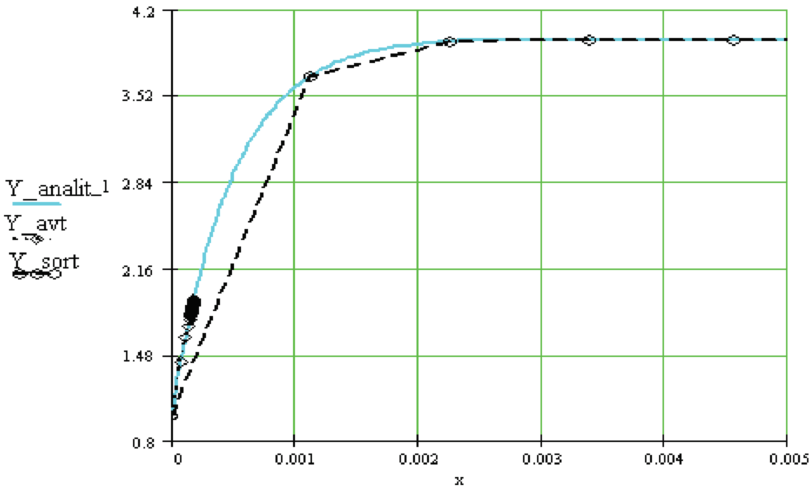

Рис. 5. Результати дослідження алгоритму з автоматичним вибором кроку

Отже, запропонований алгоритм розв’язання СЖДР з автоматичним вибором кроку та фільтруванням результатів розв’язання може бути використаний в пакетах моделювання САК, оскільки враховує усі вищерозглянуті недоліки чисельних методів та алгоритмів.

Висновки

В даній роботі експериментальним шляхом було доведено, що відомі чисельні методи розв’язання систем звичайних диференційних рівнянь, не можуть бути використані в пакетах моделювання САК.

Аналіз та експериментальні дослідження традиційних для розв’язання СЖДР явних та неявних методів Гіра, показав, що ці методи не завжди дають очікувані результати.

Запропоновано алгоритм розв’язання СЖДР за заданим критерієм, що використовує автоматичну зміну кроку і фільтрування значень розв’язку, та, на відміну від вищерозглянутих методів, дозволяє вирішити поставлену проблему.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Войцех С. А., Москвина С. М., Поремский Ю. В. Подход к созданию информационной технологии моделирования нелинейных нестационарных систем // Вісник житомирського інженерно-технічного інституту. — 2002. — С. 123—132.

2. Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Т. Численные методы решения жестких систем. — М.: Наука, 1966. — 232 с.

3. Чуа Л. А., Пен-Мин Л. Машинный анализ электронных схем. — М.: Энергия, 1980. — 638 с.

4. Иванов В. В. Методы вычислений на ЭВМ. — К.: Наукова думка, 1986. — 586с.

5. MathSoft, InC. MathCAD User GUIDE. — Cambridge, MA: 2000. — 692 p.

6. Солодов А. П., Очков В. Ф. Mathcad / Дифференциальные модели — М.: МЭИ, 2002 г. — 239 с.

Рекомендована кафедрою комп'ютерних систем управління

Надійшла до редакції 10.09.02
Рекомендована до друку 30.03.04

Москвіна Світлана Михайлівна — доцент кафедри комп'ютерних систем управління; ***Голубєва Тетяна Олександрівна*** — студентка Інституту автоматики, електроніки та комп'ютерних систем управління

Вінницький національний технічний університет