

УДК 681.3.06

В. М. Михалевич, д. т. н., проф.

РЕАЛІЗАЦІЯ ТЕХНОЛОГІЇ «ЖИВИХ СТОРІНОК» В MAPLE, MATHCAD, EXCEL

Сьогодні у всьому світі відбувається інтенсивний пошук, розробка та впровадження новітніх комп'ютерних технологій навчання. При цьому, як правило, конкретна технологія нерозривно пов'язана з типом програмного середовища, у якому ця технологія реалізується. У цій статті мова йтиме про математично спрямовані дисципліни. Тут склалася така ситуація, що існує велика кількість додатків, які призначені для розв'язання математичних задач. На сьогодні в числі найпоширеніших можна назвати універсальні математичні пакети Maple, MathCAD, MatLab, Mathematica, електронні таблиці Excel [1—10]. Навіть поверхневе знайомство з цими додатками показує, що вони мають фактично рівні можливості у розв'язанні великої кількості різноманітних математичних задач. В той же час, розроблення методичних матеріалів це досить трудомістка робота. І очевидно — якщо для розроблення електронного методичного комплексу конкретного навчального курсу програмне середовище вибрано невдало, високої ефективності від усієї роботи очікувати марно. На сьогодні однією з найактуальніших є задача створення електронних підручників, що забезпечують інтерактивне навчання. Згідно традиційним уявам інтерактивне навчання реалізується за допомогою гіперпосилань. На мій погляд для викладання математично спрямованих дисциплін сьогодні є можливість реалізації більш «новітньої» технології — «технології живих сторінок». Сам термін «живі сторінки» зустрічається в літературі з різним змістовним наповненням. Наприклад, Web — сторінки з анімацією. В цій роботі під «технологією живих сторінок» розуміється створення в деякому середовищі ланцюга взаємопов'язаних команд, що реалізують алгоритм розв'язання типової математичної задачі з виведенням на екран монітора всіх ключових проміжних результатів з відповідним коментарем.

Взагалі «технологія живих сторінок» є однією з головних, покладених в основу роботи електронних таблиць Excel. Наведу найпростіший приклад, що пояснює про що йде мова. Введемо в клітину A1 число 2, а в клітину B1 — вираз: «=A1^2» (без лапок). В клітині B1 буде висвічене число «4». Якщо змінити значення, що стоїть в клітині A1, то миттєво буде змінено і значення, що висвілюється в клітині B1. Тобто, якщо в клітинах робочого листа Excel розмістити вихідні дані деякої задачі і формули, що реалізують алгоритм розв'язання цієї задачі, то зі зміною вихідних даних миттєво буде змінено всі проміжні і кінцевий результат. При цьому студент матиме можливість спостерігати, експериментувати і навчатись. Зовсім нескладно подібним чином реалізувати в Excel, наприклад, алгоритм розв'язання системи лінійних алгебричних рівнянь будь-яким методом: Гаусса, Крамера, матричним, знання яких вимагає програма курсу вищої математики у ВНЗі. Хочу акцентувати увагу, що мова йде не просто про відповідь, а про отримання всіх проміжних результатів. До речі міра деталізації — фактор суб'єктивний, але вивіреном критерієм є вимоги до, наприклад, контрольної роботи студента з відповідної теми навчального курсу. Особливо наочними в середовищі Excel виглядають задачі, які включають побудову графіків. Наприклад, нескладно реалізувати на листі Excel алгоритм побудови апроксимації таблично заданої функції за методом найменших квадратів та побудову відповідного графіка з виведенням на ньому вузлових точок та самої апроксимаційної кривої. Зі зміною значення в одній із клітинок, де містяться, значення функцій у вузлових точках, ми спостерігатимемо миттєві відповідні зміни і на графіку.

Подібна ж технологія лежить і в основі роботи робочих листів математичного пакета MathCAD. Зі внесенням змін в деякому місті листа, автоматично переобчислюються всі формули і графіки, що розташовані праворуч та нижче від цього місця. За цю зручність MathCAD платить ціною ускладненого програмування в його середовищі.

В основу роботи Maple покладено іншу технологію. Але після внесення будь-яких змін можна виконати команду Execute/Worksheet або Execute/Selection із меню Edit. При цьому будуть виконані за чергою всі оператори листа або виділені оператори. Фактично це також є «технологія живих сторінок». Звісно головним в «технології живих сторінок» є не нюанси (в деяких задачах мож-

ливо навіть суттєві) її організації: автоматично відбувається переобчислення, чи після натискання якихось кнопок; яка кількість інформації вміщується на видимій на екрані частині листа і т. ін. Можливо, що за деякими показниками Maple і не буде найкращим. Але Maple має суттєву перевагу: в його середовищі можна реалізовувати «технологію живих сторінок» для задач, алгоритм розв'язування яких передбачає символіні перетворення. Загальні міркування вимагають чітких означень використовуваних понять, і при цьому однаково залишаються малозрозумілими. Тому наведу один із багатьох можливих прикладів задачі, яка розв'язана в Maple і розв'язання якої практично неможливо реалізувати в Excel або в MathCAD (закликаю до аргументованої дискусії тих, хто з цим не погоджується).

Задача полягає в створенні алгоритма і програми, що дозволяє отримати всі проміжні перетворення під час знаходженні границі виразу з невизначенністю виду 1^∞ . Процедура My_Lim() виконує цю задачу.

```
>My_Lim:=proc()
  local f,eq,L1,L2,L3,t,alp,expr;
  f:=args[1]:eq:=args[2];
  expr:=Limit(seq(args[k],k=1..nargs));
  if type(f,``) then
    L1:=limit(op(1,f),eq):
    L3:=`if`(rhs(eq)=infinity,abs(limit(op(2,f),eq)),abs(limit(op(2,f),e
q,right)));
    L2:=`if`(rhs(eq)=-
infinity,abs(limit(op(2,f),eq)),abs(limit(op(2,f),eq,left)));
    if L1=1 and L2=infinity and L3=infinity then
      print(`Приведемо хід розв'язання задачі знаходження границі:`);
      print(expr);
      print(`В даному випадку границя основи дорівнює 1 , а показник сте-
пеня прямує до нескінченності;`);
      print(`маємо невизначенність виду `*'1''^'infinity'`);
      print(`іноді говорять - "невизначенність типу e"`);
      print(`Для того, щоб розкрити цю невизначенність подамо основу сте-
пеня у вигляді `(1+alpha(x)),``);
      print(`а в показнику виділимо множник `(1/alpha(x))`);
      print(`і скористаємося другою стандартною границею:`);
      print(Limit((1+alpha(x))^(1/alpha(x)),alpha(x)=0)=exp(1));
      alp:=simplify(op(1,f)-1);
      if (op(2,f))=1/alp then
        print(`В даному випадку: `*alpha(x)=alp,` та дорівнює оберненій ве-
личині показника степеня, отже`);
        print(expr=value(expr));
      else
        print(`В даному випадку: `*alpha(x)=alp,` тому виконаємо наступні
перетворення виразу під знаком границі`);
        print(`);
        L1:=Limit((1+[alp])^(op(2,f)),eq):
        print(expr=L1);
        L2:=Limit(op(1,op(1,L1))^(1/op(2,op(1,op(1,L1)))),eq):
        t:=((op(2,f))*op(2,op(1,op(1,L1)))):
        print(L1=L2^t);
        L3:=remove(type, t, 'list')*op(select(type, t, 'list')):
        print(L2^t=exp(Limit(L3,eq)));
        print(exp(Limit(L3,eq))=exp(limit(L3,eq)));
```

```

print(expr=value(expr));
end if
else
print(`Ця процедура не може дати хід розв'язання задачі знаходження
заданої границі`,expr=value(expr))
end if
else
print(`Ця процедура не може дати хід розв'язання задачі знаходження
заданої границі`,expr=value(expr))
end if
end proc:

```

Як параметри процедури потрібно задати аналітичний вираз функції, для якої знаходиться границя та значення, до якого прямує аргумент функції — за синтаксисом Maple. Наприклад, потрібно знайти

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^{(5x)}$$

Викликаємо процедуру `My_Lim()`:

```
>My_Lim((x+3)/(x-2)^(5*x), x=infinity);
```

Результати виконання процедури показані на рисунку.

Приведемо хід розв'язання задачі знаходження границі:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^{(5x)}$$

В даному випадку границя основи дорівнює 1, а показник степеня прямує до нескінченності;

маємо невизначенність виду 1^∞

(іноді говорять - "невизначенність типу e")

Для того, щоб розкрити цю невизначенність подамо основу степеня у вигляді

$(1 + \alpha(x))$,

а в показнику виділимо множник $\frac{1}{\alpha(x)}$

і скористаємося другою стандартною границею:

$$\lim_{\alpha(x) \rightarrow 0} (1 + \alpha(x))^{\left(\frac{1}{\alpha(x)}\right)} = e$$

В даному випадку: $\alpha(x) = 5 \frac{1}{x-2}$,

тому виконаємо наступні перетворення виразу під знаком границі

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^{(5x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \left[5 \frac{1}{x-2} \right] \right)^{(5x)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \left[5 \frac{1}{x-2} \right] \right)^{(5x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \left[5 \frac{1}{x-2} \right] \right)^{\left(\frac{1}{\left[5 \frac{1}{x-2} \right]} \right)} \left(5x \left[5 \frac{1}{x-2} \right] \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \left[5 \frac{1}{x-2} \right] \right)^{\left(\frac{1}{\left[5 \frac{1}{x-2} \right]} \right)} \left(5x \left[5 \frac{1}{x-2} \right] \right) \\ &= e^{\left(\lim_{x \rightarrow \infty} 25 \frac{x}{x-2} \right)} \\ &= e^{\left(\lim_{x \rightarrow \infty} 25 \frac{x}{x-2} \right)} = e^{25} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^{(5x)} &= e^{25} \end{aligned}$$

Якщо вираз під знаком границі не є невизначеністю виду 1^∞ , то процедура `My_Lim()` повертає тільки остаточну відповідь:

`>My_Lim(sin(x)/x, x=0, left);`

Ця процедура не може дати хід розв'язання задачі знаходження заданої границі,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Процедуру опротестовано на десятках прикладів, в тому числі і на таких:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^{(5x)} ; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x-4} \right)^{(1-x)} ; \lim_{x \rightarrow (-1)} (2+x)^{\left(\frac{x}{3x+3} \right)} ; \lim_{x \rightarrow 0} (1+3 \tan(x)^2)^{(\cot(x)^2)} ; \\ \lim_{x \rightarrow 0} (1-3 \tan(x)^2)^{(\cot(x)^2)} ; \lim_{x \rightarrow 0} (1+\sin(x))^{\csc(x)} ; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 \frac{x}{2x-3} \right)^{(3x)} ; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5} \frac{5x^2+2}{x^2} \right)^{(\sqrt{x})} ; \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5} \frac{5x^2+2}{x^2} \right)^{(\sqrt{x^5})} ; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5} \frac{5x^2+2}{x^2} \right)^{(x^6)} ; \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x^2)^{\left(\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \right)} ; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{(x+1)} ; \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2}{x^2+1} \right)^{(ax^2)} \end{aligned}$$

Процедуру `My_Lim()` можна допрацювати так, щоб вона давала хід розв'язання практично для всіх типових виразів з невизначеностями усіх видів, що розглядаються у курсі вищої математики ВТНЗ.

Досить цікавим є те, що в чисельних матеріалах по математичним пакетам, в першу чергу, розмішеним в інтернеті на російсько-мовних сайтах, опис різних пакетів та їх порівняння носить загальний та описовий характер. Нерідко у інтернет матеріалах приводяться спекулятивні твердження, які спотворюють істину картину. Так на Web-сторінці з адресою «<http://www.exponenta.ru/educat/class/courses/student/ode/examples.asp>» можна прочитати гіперпоширення

«**Пример 1.** Уравнение с разделяющимися переменными. **Общее решение.**».

Ідемо далі і знову читасмо

Пример 1. Уравнение с разделяющимися переменными. **Общее решение.**

Найдем **общий интеграл уравнения** с разделяющимися переменными.

Решение примера в среде пакета Mathcad (!!!)

Але ж відомо, що: по-перше, всі символні операції, які можна виконувати в MathCAD, виконує спрощений варіант ядра символного процесора Maple (фірма MathSoft - розробник MathCAD, здобула ліцензію у фірми Waterloo Maple Software на використання цього ядра [4]). По-друге — в MathCAD відсутня команда `dsolve` — команда Maple, яка дозволяє знаходити загальні розв'язки звичайних диференціальних рівнянь. Заінтригований я знову тисну на гіперпосилання і отримую «обіцяний» розв'язок. На Web-сторінці, що з'являється, приводиться «*фручне*» зведення *конкретного* прикладу до квадратур (що є основною частиною процесу розв'язання диференціального рівняння з відокремленими змінними), а далі застосовується символна команда інтегрування. У «неискушенного читателя» може сформуватися уява нібито в MathCAD можна робити те, на що насправді він не придатний. Прикро, що подібні ситуації мають місце на центральному російськомовному сайті, присвяченому математичним пакетам.

Часто в різних виданнях методичного характеру приводиться розв'язання одних і тих самих задач в різних пакетах [11]. Але ж, на мій погляд, цікавішим є якраз демонстрація розв'язку таких задач, які характеризують переваги конкретного середовища. Трохи дивною здається і сучасна стратегія розробників пакета Maple — групи співробітників канадського університету Waterloo. В дев'ятій версії пакета включено новий пакет для студентів. А саме — пакет для вивчення лінійної алгебри. У вступі сказано, що цей студентський пакет прискорює вивчення абстрактних понять за допомогою набору інтерактивних підручників і алгоритмів візуалізації. Але ж саме цей розділ математики, найменше всього демонструє переваги пакета Maple перед іншими математичними пакетами.

Розробивши процедури, подібні до приведеної, для всіх розділів курсу вищої математики, можна створювати в середовищі Maple ефективні електронні підручники з «живими сторінками»: для читання лекцій, проведення практичних та лабораторних занять, для самостійної роботи студентів, тобто створювати навчально-контрольовані електронні комплекси.

І останнє суттєве питання про масове використання студентами розглянутих додатків. Навіть найдешевший із розглянутих — Excel, який до того ж має значно ширші застосування, ніж розв'язання задач вищої математики, встановлено далеко не на всіх комп'ютерах ВНТУ. Ліцензійних копій MathCAD у ВНТУ — всього декілька. Ліцензійних копій Maple на сьогодні — тільки одна. Це пакет досить дорогий. Але приведений програмний код нескладно модифікувати так, щоб з ним можна було працювати в DEMO версії Maple, інсталяційний пакет, якої займає 1452 Кб і яка може бути встановлена на всіх комп'ютерах університету. Автором розроблено технологію підготовки студентами файлів для роботи в DEMO версії та збереження результатів роботи, яка дозволяє частково «обійти» обмеження DEMO версії, в середовищі якої заблоковано операції копіювання, вставки та збереження файлу. Набутий у 2003 році досвід проведення лабораторних робіт з математичного програмування дозволяє зробити оптимістичний прогноз на можливості впровадження комп'ютерних технологій, подібних до описаної. Безумовно, коли стане можливим придбання достатньої для масового навчання кількості ліцензійних копій пакета, ефективність розроблених навчально-контрольних комплексів відчутно зросте.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Васильев А. Н. Maple 8. Самоучитель. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. — 353 с.
2. Матросов А. В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. — СПб.: БХВ-Петербург, 2001. — 528 с.
3. Аладьев В. З. Эффективная работа в Maple 6/7. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. — 336 с.
4. Дьяконов В. П. Maple 7: учебный курс. — СПб.: Питер, 2002. — 672 с.
5. Манзон Б. М. Maple V Power Edition. — М.: Информационно-издательский дом «Филин», 1998. — 240 с.
6. Maple 9/ Advanced Programming Guide/M. B. Monagan, K. O. Geddes, K. M. Heal, G. Labahn, S.M. Vorkoetter, J. McCarron, P. DeMarco. Canada. Maplesoft, division of Waterloo Maple Inc. 2003.
7. Дьяконов В. П. Mathcad 2001: учебный курс. — СПб.: Питер, 2001.
8. Дьяконов В. П. MATLAB 5.3: учебный курс. — СПб.: Питер, 2001.

9. Аладьев В. З., Шишаков М. Л. Введение в среду пакета Mathematica 2.2. — М.: Информационно-издательский дом «Филин», 1997. — 368 с.
10. Вильям Орвис. EXCEL для ученых, инженеров и студентов: Пер. с англ. — К.: Юниор, — 1999. — 528 с.
11. Фирсов И. П., Семерий О. С. Методические указания к лабораторным работам по математической статистике с применением ЭВМ (Maple, Mathematica, Matlab, Mathcad) / Таганрогский государственный радиотехнический университет. — 66 с.
12. <http://www.exponenta.ru/educat/systemat/systemat.asp>

Рекомендована кафедрою прикладної математики

Надійшла до редакції 20.11.03
Рекомендована до друку 15.12.03

Михалевич Володимир Маркусович — завідувач кафедри прикладної математики.

Вінницький національний технічний університет