УДК 515.12

УДК 621.3.031:510.6

Б. І. Мокін, д. т. н., проф.,
В. В. Камінський

СЛАБКІ МНОЖИНИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ДАНИХ

Поняття множини є одним із основних первинних понять, на яких базується сучасна математика. Тому поява в 1965 році роботи Л. Заде [1], в якій введено більш загальне поняття нечіткої множини обумовила бурхливий розвиток теорії нечітких множин та перегляду багатьох математичних фундаментальних понять, теорій і концепцій з метою розширення їх на більш загальний випадок нечітких множин. Таке розширення привело фактично до створення математики нечіткості, яка в окремому випадку переходить в межі звичайних математичних теорій, що базуються на понятті звичайної (чіткої) множини у відповідності до того, як нечітка множина в окремому випадку її функції належності переходить в звичайну множину.

Математична теорія прийняття рішень в умовах невизначеності даних, однією із перших сприйняла та почала використовувати концепції теорії нечітких множин. З точки зору цієї теорії з'явилась можливість в просторі невизначеності параметрів задачі задати нечітке представлення цих невизначених параметрів та в результаті отримати деякий нечіткий розв'язок (дивись, наприклад [2, 3]).

Таким чином Л. Заде поширив математичний формалізм до такого рівня, де чіткі значення параметрів в деякому універсумі задачі не існують, або не сформовані, або невідомі, але обов'язково існують їх нечіткі представлення у вигляді нечітких множин із заданими їх функціями належності. Тим самим між станом повної невизначеності параметрів задачі, коли на універсумі цих параметрів не задано ніяких математичних структур окрім самого універсума та станом визначеності, коли в універсумі задані чіткі значення параметрів, з'явився проміжний стан нечітко заданих параметрів. Математика нечіткості розробляє методи роботи з такими нечіткими об'єктами, але її формалізм не має ніякого відношення до того, де взялися ці нечіткі об'єкти.

Це типова і законна ситуація для математичних теорій. Наприклад, математичні теорії та методи традиційної математики працюють там, де задані деякі детерміновані дані. Математичний формалізм не має ніякого відношення до того, як їх отримати. Це залишається концептуальною проблемою, в окремому випадку — проблемою фізичних вимірів. Теорія ймовірностей працює тільки там, де відомі ймовірності випадкових подій, функції розподілу ймовірностей випадкових величин, точок, векторів, тощо. Аксіоматична теорія ймовірностей, як формальна математична теорія немає ніякого відношення до того, де взялися ці ймовірності та функції розподілу ймовірностей. Проблеми отримання функцій розподілення ймовірностей лежать за межами цієї теорії і вимагають виконання масових експериментів за умови наявності їх статистичної стійкості, що дає можливість інтерпретувати ймовірність, як частоту появи тієї чи іншої випадкової події в статистичному експерименті. Якщо виконання відповідного експерименту неможливе з тієї чи іншої причини, або відсутня статистична стійкість експерименту, то для визначення функцій розподілу ймовірностей залишається можливість використовувати експертні оцінки. Але в цьому випадку ймовірність повинна бути інтерпретована як суб'єктивна ступінь впевненості експерта в можливості настання тієї чи іншої випадкової події.

Що стосується нечітких множин, то суб'єктивні експертні оцінки є на цей час єдиним джерелом для визначення їх функцій належності. Тому отримані таким чином результати можуть значною мірою залежати як від самого експерта, так і від методу проведення експертної процедури, в результаті якої повинні бути отримані функції належності невизначених параметрів, а значить ступені належності кожного елемента універсума кожній із відповідних нечітких множин. У передмові до роботи [2] М. М. Моісеєв справедливо зазначив, що отримані таким способом функції належності завжди залишаються тільки гіпотезами.

На погляд авторів цієї статті з означених причин між станом повної невизначеності та станом нечіткого представлення невизначених параметрів доцільно було б ввести деякий проміжний стан, який передував би нечіткому представленню невизначених параметрів і в якому б формувались більш загальні в порівнянні з нечіткими множинами математичні структури та діяли деякі формальні закони, які б обмежували суб'єктивні рішення експерта та контролювали їх несуперечність.

Математична структура, яка повинна відповідати цьому проміжному стану на думку авторів повинна розбивати елементи універсума на класи, для яких задаються тільки деякі верхні та нижні точні грані можливих рівнів належності, на яких можуть знаходитись ці елементи по відношенню до ще неіснуючих нечітких об'єктів. Що стосується конкретних ступенів належності кожного елемента універсума нечітким об'єктам, то в межах цього проміжного стану вони не повинні визначатись. Такі структури, які є передмножиною в звичайному та нечіткому трактуванні поняття «множина», автори назвали слабкою множиною.

Наведемо основні результати запропонованої авторами строгої математичної формалізації слабких множин.

Множину M_α, яка утримує найменший та найбільший елементи стосовно заданого на ній бінарного відношення нестрогого досконалого порядку D_α, будемо називати множиною ненапрямлених рівнів належності.

Оскільки, в будь-якій упорядкованій множині, якій належать найменший та найбільший елементи, найменший елемент є одночасно єдиним мінімальним елементом цієї множини, а найбільший елемент — єдиним максимальним її елементом [4], то, на цій підставі, надалі будемо називати ці елементи відповідно мінімальним та максимальним і позначати $\min M_\alpha$ та $\max M_\alpha$.

Діагональне відношення E_α на M_α будемо називати відношенням рівності, а відношення $\overline{E}_\omega = M_\omega^2 \setminus E_\alpha$ відношенням нерівності ненапрямлених рівнів належності. Відношення $S_\alpha = D_\alpha \setminus E_\alpha$, індуковане відношенням D_α, називатимемо строгою упорядкованістю ненапрямлених рівнів належності.

Двоелементну множину $M_\omega = \{+, -\}$ із заданим на ній нестрогим лінійним порядком D_ω таким, що $D_\omega = \{(+,+), (+,-), (-,-)\}$, будемо називати множиною напрямленостей рівнів належності.

Діагональне відношення E_ω на M_ω будемо називати рівністю, а відношення $\overline{E}_\omega = M_\omega^2 \setminus E_\omega$ відношенням нерівності напрямленостей. Відношення $S_\omega = D_\omega \setminus E_\omega$, індуковане відношенням D_ω назвемо строгою упорядкованістю елементів множини M_ω. В такому випадку отримаємо:

$$E_\omega = \{(+,+),\ (-,-)\},\ \overline{E}_\omega = \{(+,-),\ (-,+)\},\ \ S_\omega = \{(+,-)\}.$$

У відповідності з відношенням S_ω введемо мінімальний та максимальний елементи множини M_ω: $\min M_\omega = -$ та $\max M_\omega = +$.

Напрямленість «–» будемо називати негативною, а напрямленість «+» — позитивною. Згідно відношення S_ω, за аналогією до відношення > на множині дійсних чисел, будемо говорити, що позитивна напрямленість більша за негативну.

Множину $M_{\alpha\omega} = M_\alpha \times M_\omega \setminus \{(\max M_\alpha;\ \min M_\omega)\}$ із заданим на ній бінарним відношенням строгого досконалого порядку $S_{\alpha\omega}$ таким, що

$$\forall(\alpha, \omega_\alpha), (\beta, \omega_\beta) \in M_{\alpha\omega}\big((\beta, \omega_\beta)\, S_{\alpha\omega}\, (\alpha, \omega_\alpha) \overset{df}{\Leftrightarrow} (\beta\ S_\alpha \alpha \wedge \omega_\beta\, E_\omega \omega_\alpha) \vee (\omega_\beta\ S_\omega \omega_\alpha)\big) \tag{1}$$

будемо називати простором напрямлених рівнів належності або просто простором (множиною) рівнів належності.

Як відомо елементи декартового добутку є упорядковані пари. Перший елемент кожної такої пари, який належить множині M_α будемо позначати першими малими літерами грецького алфавіту α, β, γ. Позначаючи другий елемент кожної такої пари, який належить множині M_ω будемо використовувати його можливі значення + та –. Для загального позначення другого елемента упорядкованої пари будемо використовувати останні символи грецького алфавіту ω, ψ та інші.

За необхідності звернутись до елементів множини $M_{\alpha\omega}$ як до упорядкованих пар з конкретним значенням другого елемента пари будемо писати $(\alpha, +)$, $(\beta, -)$ або простіше α^+, β^-. Для загального звернення як до першого так і до другого елемента упорядкованої пари із множини $M_{\alpha\omega}$ будемо використовувати позначення (α, ω), (β, ψ) або (α, ω_α) (β, ω_β) або більш коротко α^ω, β^ψ.

Із означення простору напрямлених рівнів належності випливає, що йому належать всі елементи декартового добутку множин M_α та M_ω за виключенням елемента $(\max M_\alpha ; \min M_\omega)$. Крім того, на цій множині повинно бути задано бінарне відношенням строгого досконалого порядку виду (1).

Діагональне відношення $E_{\alpha\omega}$ на $M_{\alpha\omega}$ будемо називати рівністю напрямлених рівнів належності. В такому випадку будемо мати

$$\forall(\alpha, \omega_\alpha), (\beta, \omega_\beta) \in M_{\alpha\omega}\ \big((\alpha, \omega_\alpha)\, E_{\alpha\omega}\, (\beta, \omega_\beta) \Leftrightarrow \alpha\, E_\alpha\, \beta\ \wedge\ \omega_\alpha E_\omega\, \omega_\beta\big). \tag{2}$$

Відношення $\overline{E}_{\alpha\omega} = M^2_{\alpha\omega} \setminus E_{\alpha\omega}$ назвемо нерівністю елементів множини $M_{\alpha\omega}$. В такому випадку з урахуванням (2) отримаємо:

$$\forall(\alpha, \omega_\alpha), (\beta, \omega_\beta) \in M_{\alpha\omega}\ \big((\alpha, \omega_\alpha)\, \overline{E}_{\alpha\omega} (\beta, \omega_\beta) \Leftrightarrow \alpha\ \overline{E}_\alpha\, \beta\ \vee\ \omega_\alpha\, \overline{E}_\omega\, \omega_\beta\big).$$

Відношення нестрогого порядку $D_{\alpha\omega} = S_{\alpha\omega} \cup E_{\alpha\omega}$, індуковане відношенням $S_{\alpha\omega}$ на $M_{\alpha\omega}$, будемо називати нестрогою лінійною упорядкованістю напрямлених рівнів належності. Наступна теорема задає необхідні і достатні умови для відношення $D_{\alpha\omega} \subseteq M^2_{\alpha\omega}$, виражаючи його через відношення $D_\alpha \subseteq M^2_\alpha$, $E_\omega \subseteq M^2_\omega$ та $S_\omega \subseteq M^2_\omega$.

Теорема. *Відношення $D_{\alpha\omega}$ на $M_{\alpha\omega}$ є відношенням лінійного нестрогого порядку напрямлених рівнів належності тоді та тільки тоді, коли для будь-яких* (α, ω_α), $(\beta, \omega_\beta) \in M_{\alpha\omega}$ *істинним є вираз*

$$(\beta, \omega_\beta) D_{\alpha\omega} (\alpha, \omega_\alpha) \Leftrightarrow \big((\beta\, D_\alpha \alpha \wedge \omega_\beta\, E_\omega\, \omega_\alpha) \vee (\omega_\beta\, S_\omega \omega_\alpha)\big). \tag{3}$$

Доведення. Запишемо рівність $D_{\alpha\omega} = S_{\alpha\omega} \cup E_{\alpha\omega}$ у вигляді співвідношень. Враховуючи (1) та (2) для будь-яких (α, ω_α), $(\beta, \omega_\beta) \in M_{\alpha\omega}$ отримаємо

$$(\beta, \omega_\beta) D_{\alpha\omega} (\alpha, \omega_\alpha) \Leftrightarrow \big((\beta\, S_\alpha \alpha \wedge \omega_\beta\, E_\omega\, \omega_\alpha) \vee (\omega_\beta\, S_\omega\, \omega_\alpha) \vee (\alpha\, E_\alpha\, \beta \wedge \omega_\alpha\, E_\omega\, \omega_\beta)\big). \tag{4}$$

Зазначимо, що вираз $(\omega_\beta\, S_\omega\, \omega_\alpha)$ присутній в обох виразах (3) та (4), як операнд операції диз'юнкції. Тому для доведення теореми необхідно і достатньо показати, що

$$(\beta\, D_\alpha \alpha \wedge \omega_\beta\, E_\omega\, \omega_\alpha) \Leftrightarrow (\beta\, S_\alpha \alpha \wedge \omega_\beta\, E_\omega\, \omega_\alpha) \vee (\alpha\, E_\alpha\, \beta\ \wedge\ \omega_\alpha\, E_\omega\, \omega_\beta). \tag{5}$$

Використовуючи символ $\equiv$, як метапозначку рівносильності введемо позначення $a \equiv \beta\, S_\alpha \alpha$, $b \equiv \omega_\beta\, E_\omega\, \omega_\alpha$, $c \equiv \beta\, E_\alpha \alpha$. Оскільки будь-які діагональні відношення симетричні, а E_ω та E_α є діагональними відношеннями, то $\omega_\alpha E_\omega\, \omega_\beta \equiv \omega_\beta\, E_\omega\, \omega_\alpha \equiv b$, а $\alpha\, E_\alpha\, \beta \equiv \beta\, E_\alpha \alpha \equiv c$. Враховуючи це, перепишемо праву частину виразу (5), використовуючи введені позначення у вигляді: $(a \wedge b) \vee (c \wedge b)$. Використовуючи дистрибутивні властивості диз'юнкції та кон'юнкції, отримаємо ланцюжок рівносильностей: $(a \wedge b) \vee (c \wedge b) \equiv [(a \wedge b) \vee c] \wedge [(a \wedge b) \vee b] \equiv [(a \wedge b) \vee c] \wedge b \equiv (c \vee a) \wedge (c \vee b) \wedge b) \equiv (c \vee a) \wedge b$. Підставляючи в останній вираз замість a, b, c їх значення, отримаємо $(\alpha\, E_\alpha\, \beta \vee \beta\, S_\alpha \alpha) \wedge (\omega_\beta E_\omega \omega_\alpha)$. Оскільки $D_\alpha = S_\alpha \cup E_\alpha$, то $(\beta\, E_\alpha \alpha \vee \beta\, S_\alpha \alpha\ ) \equiv \beta\, D_\alpha \alpha$. З урахуванням цього останній вираз отримає вигляд $\beta\, D_\alpha \alpha \wedge \omega_\beta\, E_\omega\, \omega_\alpha$, що і потрібно було довести.

Тепер доведемо теорему про найменший та найбільший елементи множини $M_{\alpha\omega}$, позначаючи їх відповідно $\min M_{\alpha\omega}$ та $\max M_{\alpha\omega}$.

Теорема. *Множина напрямлених рівнів належності утримує найменший та найбільший елеме-*

нти для яких справедливі рівності

$$\min M_{\alpha\omega} = (\min M_\alpha, \min M_\omega), \tag{6}$$

$$\max M_{\alpha\omega} = (\max M_\alpha, \max M_\omega). \tag{7}$$

Доведення. Спочатку доведемо, що існує найменший елемент множини $M_{\alpha\omega}$, який задовольняє рівності (6). Як відомо [5], елемент $\min M_{\alpha\omega}$ буде найменшим відносно відношення $D_{\alpha\omega}$ тоді та тільки тоді, коли $\forall(\alpha, \omega)\in M_{\alpha\omega}$ $((\alpha, \omega)\ D_{\alpha\omega} \min M_{\alpha\omega})$.

Якщо в будь-якій частково упорядкованій множині існує найменший елемент, то він єдиний [4]. Припустимо, що $(\min M_\alpha, \min M_\omega)$ не є мінімальний елемент множини $M_{\alpha\omega}$. Тоді повинен існувати відмінний від нього елемент $(\beta, \omega)\in M_{\alpha\omega}$, такий, що $(\min M_\alpha, \min M_\omega)\ D_{\alpha\omega}\ (\beta, \omega) \wedge (\min M_\alpha, \min M_\omega)\ \overline{E}_{\alpha p}(\beta, \omega)$, або, що рівносильно $(\min M_\alpha, \min M_\omega)\ S_{\alpha\omega}\ (\beta, \omega)$.

Але, згідно (1) $(\min M_\alpha, \min M_\omega)\ S_{\alpha\omega}(\beta, \omega) \equiv (\min M_\alpha S_\alpha \beta \wedge \min M_\omega E_\omega \omega) \vee \min M_\omega S_\omega \omega$.

Оскільки співвідношення $\min M_\alpha\ S_\alpha\, \beta$ та $\min M_\omega\ S_\omega \omega$ суперечать означенню найменшого елемента, то отриманий вираз є хибним. Це означає, що зроблене припущення невірно, а значить елемент $(\min M_\alpha, \min M_\omega)$ множини $M_{\alpha\omega}$ є найменшим елементом цієї множини, що і потрібно було довести.

Існування найбільшого елемента множини $M_{\alpha\omega}$ і тотожність рівності (7) доводиться аналогічно.

З урахуванням введених вище понять дамо означення слабкої множини.

Слабкою множиною $\tilde{\tilde{A}}$ в універсумі X називається множина упорядкованих пар

$$\{x, \nu_A(x) \mid x\in X \wedge \nu_A\colon X \rightarrow M_{\alpha\omega}\}.$$

Функцію ν_A будемо називати функцією напрямлених рівнів або просто функцією рівнів слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$. Тому, цю функцію не слід плутати із функцією належності елементів універсума нечіткій множині $\tilde{A}$, яка задає конкретні ступені належності цих елементів множині $\tilde{A}$ і тим самим формує деяку, в загальному випадку нечітку множину в X. Що стосується слабких множин, то ступені належності їм елементів універсума не існують, а рівні належності, мають особливу властивість, яку ми назвали напрямленістю. Тим самим функція рівнів не формує в X ніякої множини в традиційному розумінні цього слова, але створює деяку більш загальну структуру, яка передує традиційній нечіткій та в окремому випадку чіткій множині. Саме цю структуру, яка є передмножиною в традиційному розумінні слова «множина», ми і будемо називати слабкою множиною. Тому, якщо $\nu_A(x) = (\alpha, +)$ або $\nu_A(x) = (\alpha, -)$ то замість «x належить слабкій множині $\tilde{\tilde{A}}$ зі ступенем належності $(\alpha, +)$ (відповідно $(\alpha, -)$)» будемо говорити, що x знаходиться по відношенню до слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ на позитивному (негативному) рівні належності α, або, що x слабо належить $\tilde{\tilde{A}}$ на позитивному (негативному) рівні α, або ще простіше, що x α-плюс (α-мінус) слабко належить $\tilde{\tilde{A}}$. Замість α-плюс слабко (α-мінус слабко) будемо також писати більш коротко α^+-слабко (α^--слабко) і позначати відповідно $\nu_A(x) = \alpha^+ (\nu_A(x) = \alpha^-)$.

Введемо також поняття функцій ненапрямлених рівнів та напрямленостей слабкої множини.

Відомо, що будь-яку функцію, область прибуття якої є декартів добуток двох множин A та B, можна представити, як пару функцій зі спільною областю означення та областями значень в множинах A та B відповідно. Оскільки область прибуття функції напрямлених рівнів належності $\nu_A\colon X \rightarrow M_{\alpha\omega}$ слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ є декартів добуток множин M_α та M_ω без елемента $(\max M_\alpha, \min M_\omega)$, то її можна представити, як пару функцій $\alpha_A\colon X \rightarrow M_\alpha$ та $\omega_A\colon X \rightarrow M_\omega$ таких, що $(\alpha_A(x) = 1 \Rightarrow \omega_A(x) \neq -) \wedge (\omega_A(x) = - \Rightarrow \alpha_A(x) \neq 1)$, $\forall\, x \in X$.

Першу функцію пари α_A, яка ставить у відповідність кожному елементу універсума X деякий ненапрямлений рівень належності будемо називати функцією ненапрямлених рівнів належності слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ або просто функцією її ненапрямлених рівнів. Другу функцію пари ω_A, яка задає тим самим елементам напрямленість рівнів належності, отриманих ними за допомогою першої функції, будемо називати функцією напрямленостей рівнів належності слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$, або простіше її функцією напрямленостей. Таким чином функцію рівнів слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ можна представити у векторному вигляді, як функцію ν_A або в координатному — як пару функцій (α_A, ω_A). З урахуванням введених позначень для кожного x його образ при відображені ν_A можна подати, як $\nu_A(x)$, або як пару $(\alpha_A(x), \omega_A(x))$, $\alpha_A(x)\in M_\alpha$, $\omega_A(x)\in M_\omega$.

Надалі у ролі множини ненапрямлених рівнів належності слабкої множини будемо використовувати відрізок [0; 1] із заданими на ньому природними відношеннями порядку $\geq$, $>$ та оберненими до них $\leq$, $<$, а також діагональним відношенням $=$ та його доповненням $\neq$. Множина $M_\alpha = [0; 1]$ утримує мінімальний та максимальний елемент $\min M_\alpha = 0$ та $\max M_\alpha = 1$, які є одночасно її єдиними найменшим та найбільшим елементами. Згідно (6), (7) множина $M_{\alpha\omega} = [0; 1]\times\{+, -\}\backslash\{(1; -)\}$ утримує мінімальний елемент $\min M_{\alpha\omega} = 0^-$ та максимальний елемент $\max M_{\alpha\omega} = 1^+$.

Для зручності, відношення S_ω, D_ω, E_ω, $\overline{E}_\omega$ на множині $M_\omega = \{+, -\}$, а також відношення $S_{\alpha\omega}$, $D_{\alpha\omega}$, $E_{\alpha\omega}$, $\overline{E}_{\alpha\omega}$ на множині $M_{\alpha\omega}$ будемо позначати однаково, аналогічно відповідним відношенням на множині дійсних чисел, знаками $>$, $\geq$, $=$, $\neq$ а відношення, обернені до відношень S_ω, $S_{\alpha\omega}$ та D_ω, $D_{\alpha\omega}$ — відповідно знаками $<$, $\leq$. З урахуванням цих домовленостей перепишемо властивості строгого порядку, рівності, нерівності та теорему про нестрогий порядок на множині напрямлених рівнів належності для $M_{\alpha\omega}$ у відповідності із (1)—(4) у вигляді таких тотожно істинних еквіваленцій:

$$\forall(\alpha, \omega_\alpha), (\beta, \omega_\beta) \in M_{\alpha\omega} \left((\beta, \omega_\beta) > (\alpha, \omega_\alpha) \Leftrightarrow (\beta > \alpha \ \wedge\ \omega_\beta = \omega_\alpha) \vee (\omega_\beta > \omega_\alpha)\right),$$

$$\forall(\alpha, \omega_\alpha), (\beta, \omega_\beta) \in M_{\alpha\omega} \left((\alpha, \omega_\alpha) = (\beta, \omega_\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta \ \wedge\ \omega_\alpha = \omega_\beta\right),$$

$$\forall(\alpha, \omega_\alpha), (\beta, \omega_\beta) \in M_{\alpha\omega} \left((\alpha, \omega_\alpha) \neq (\beta, \omega_\beta) \Leftrightarrow \alpha \neq \beta \ \vee\ \omega_\alpha \neq \omega_\beta\right),$$

$$\forall(\alpha, \omega_\alpha), (\beta, \omega_\beta) \in M_{\alpha\omega} \left((\beta, \omega_\beta) \geq (\alpha, \omega_\alpha) \Leftrightarrow \left((\beta \geq \alpha \ \wedge\ \omega_\beta = \omega_\alpha) \vee (\omega_\beta > \omega_\alpha)\right)\right).$$

Слід звернути увагу, що згідно наведених властивостей бінарних відношень в просторі $M_{\alpha\omega}$, будь-який позитивний рівень належності більший за будь який негативний. Зокрема, рівень 0^+ більший за будь-який негативно напрямлений рівень належності.

Введемо поняття пустої слабкої множини в X, позначаючи її $\tilde{\tilde{\varnothing}}$:

$$\tilde{\tilde{\varnothing}} \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall x\in X \left(\nu_\varnothing(x) = 0^-\right). \tag{8}$$

Згідно прийнятих домовленостей, означення (8) можна висловити таким чином: слабка множина пуста тільки в тому випадку, коли всі елементи універсума належать їй 0^--слабко. Семантично, означення слабкої множини задає умови, коли в універсумі X не існує не тільки непустих звичайних та нечітких множин, але й більш загальної структури, яку ми назвали слабкою множиною. Згідно означення (8) непуста слабка множина починає існувати в універсумі X, якщо хоч один його елемент буде мати більший за $\min M_{\alpha\omega} = 0^-$ напрямлений рівень належності. Слід зазначити, що такий рівень належності може бути негативно напрямленим, тобто меншим за 0^+, або може бути рівним 0^+.

Введемо також поняття повної слабкої множини в X, позначаючи її $\tilde{\tilde{X}}$:

$$\tilde{\tilde{X}} \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall x \in X \left(\nu_X(x) = 1^+\right). \tag{9}$$

Повна слабка множина в деякому розумінні є антиподом пустої слабкої множини. Згідно означення (9) слабка множина повна тільки, якщо всі елементи універсума мають по відношенню до неї максимально можливий напрямлений рівень належності $\max M_{\alpha\omega} = 1^{+}$, а згідно означення (8) слабка множина пуста тільки за умови, що всі елементи універсума мають по відношенню до неї мінімально можливий напрямлений рівень належності $\min M_{\alpha\omega} = 0^{-}$.

Множину $M_{\alpha A} \overset{df}{=} \{\alpha \in M_\alpha \mid (\alpha, \omega) \in \nu_A(X)\}$ назвемо множиною рівнів слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ в X, а множину $M_{\omega A} \overset{df}{=} \{\omega \in M_\omega \mid (\alpha, \omega) \in \nu_A(X)\}$ її множиною напрямленостей, де $\nu_A(X)$ — образ універсума X при відображені ν_A. Як видно із наведених рівностей за означенням множина рівнів $M_{\alpha A}$ слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ в X утримує всі ненапрямлені рівні, які приймали участь у формуванні цієї слабкої множини, тобто формально є областю значень її функції ненапрямлених рівнів належності α_A. Аналогічно, множина напрямленостей $M_{\omega A}$ слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ в X утримує всі напрямленості, які приймали участь у її формуванні, тобто формально є областю значень її функції напрямленостей рівнів належності ω_A.

Якщо множина рівнів $M_{\alpha A}$ слабкої множини в X утримує лише один елемент, то отримаємо найпростішу слабку множину, яку назвемо α-слабкою та позначимо $^{\alpha}\tilde{\tilde{A}}$. Очевидно, що для будь-якої α-слабкої множини $^{\alpha}\tilde{\tilde{A}}$ $\alpha_A(x) = \alpha,\ \forall\ x \in X$.

Якщо α-слабка множина $^{\alpha}\tilde{\tilde{A}}$ в X має двоелементну множину напрямленостей $M_{\omega A} = \{-, +\}$, то вона розіб'є елементи універсума X на два класи. Елементи першого із них отримають верхню точну границю можливого рівня належності α, який буде нижньою точною границею можливого рівня належності для всіх елементів другого класу. Звичайно, задати α-слабку множину на елементах деякого універсума значно простіше, ніж нечітку множину, яка вимагає приписати кожному елементу універсума конкретну ступінь належності цій нечіткій множині. Тому α-слабкі множини і повинні бути найпростішими результати роботи експерта.

Дослідження, виконані авторами, показали, що для слабких множин можна ввести відношення та операції подібні до відношень та операцій над звичайними та нечіткими множинами. При цьому для слабких множин мають місце аналогічні властивості бінарних відношень та закони алгебри звичайних та нечітких множин за виключенням законів виключеного третього, які не виконується також і в алгебрі нечітких множин.

З допомогою відношень та операцій над слабкими множинами можна на формально математичному рівні отримувати більш складне та повне слабке представлення невизначених параметрів, використовуючи для цього результати роботи експертів у вигляді α-слабких множин та результати слабких операцій, виконаних раніше. Це дає можливість розповсюдити математичний формалізм на такий низький рівень просторів невизначеності, коли в них іще не існують не тільки чіткі детерміновані, але й стохастичні (у вигляді функцій розподілу ймовірностей) та нечіткі (у вигляді функцій належності) представлення невизначених параметрів і, тим самим, значно ослабити роль суб'єктивізму експертів в формуванні слабких та на їх основі нечітких об'єктів.

Отримані результати показують, що одним із практичних застосувань теорії слабких множин може бути їх застосування для автоматизації процесу отримання повної слабкої та нечіткої картин невизначеної ситуації з використанням математичних методів теорії слабких множин на таких стадіях процесу, де ніякі інші математичні методи не можуть працювати. Крім того слабкі множини можна використовувати, як самостійний спосіб представлення параметрів в задачах прийняття рішень в умовах невизначеності даних та формувати з їх допомогою критерії оптимальності, які узагальнюють мінімаксні критерії гарантованого успіху [6].

В [7, 8] показано як можна розповсюдити найпростіший випадок операцій над слабкими множинами, так звані α-слабкі операції на нечіткі множини у вигляді законів їх зовнішньої композиції [9].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Zadeh L. Fuzzy sets // Information and control. — 1965. — Vol. 8. — P. 338—353.
2. Орловский С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. — М.: Наука, 1981. — 208 с.
3. Трухаев Р. И. Модели принятия решений в условиях неопределенности. — М.: Наука, 1981, 258 с.
4. Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра: Пер.с англ. — М.: Мир, 1976. — 400с.
5. Синюков Н. С., Матвеенко Т. И. Топология. — К.: Вища школа, 1984. — 264 с.
6. Демянов В. Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. — М.: Наука, 1972. — 368 с.
7. Мокін Б. І., Камінський В. В., Кацив С.Ш. Нетрадиційні операції та принципи узагальнення в теорії нечітких множин (основні ідеї та перспективи застосування в прикладних задачах) // Вісник ВПІ. — 2000. — № 5. — С. 83—88.
8. Мокін Б. І., Камінський В. В., Кацив С. Ш. Властивості слабких операцій в теорії нечітких множин // Вісник ВПІ. — 2001. — № 5. — С. 106— 113.
9. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств: Пер. с франц. — М.: Радио и связь, 1982. — 432 с.

Рекомендована кафедрою електричних систем електроспоживання та енергозбереження

Надійшла до редакції 6.04.04
Рекомендована до друку 27.05.04

Мокін Борис Іванович — завідувач кафедри моделювання і моніторингу складних систем; ***Камінський В'ячеслав Вікторович*** —інженер кафедри електричних систем електроспоживання та енергозбереження.

Вінницький національний технічний університет