

УДК 681.5.023+681.5.015+62-83:629.433

Б. І. Мокін, д. т. н., проф.;

О. Б. Мокін, асп.

ДРУГА ІТЕРАЦІЯ АЛГОРИТМУ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ В ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ ЕЛЕКТРОПРИВОДА ТРАМВАЯ ПРИ ЙОГО СТАЛОМУ НАВАНТАЖЕННІ

1. Вихідні передумови та постановка задачі

В роботі [1] нами побудовані математичні моделі задачі оптимізації за критерієм

$$Q = \int_0^{\tau_k} i^2 dt \quad (1)$$

режиму роботи за програмою

$$\beta = \int_0^{\tau_k} v dt \quad (2)$$

електропривода трамвая з електродвигунами послідовного збудження, динаміка яких описується рівнянням

$$i\dot{\phi} = \dot{v} + \mu_0 \quad (3)$$

з граничними умовами

$$v(0) = 0, \quad (4)$$

$$v(\tau_k) = 0. \quad (5)$$

В формулах (1)—(5): i — струм якоря, ϕ — робочий магнітний потік, v — кутова швидкість обертання ротора електродвигуна, \dot{v} — її похідна, μ_0 — момент навантаження на валу ротора, τ — час, — які задані у відносних одиницях:

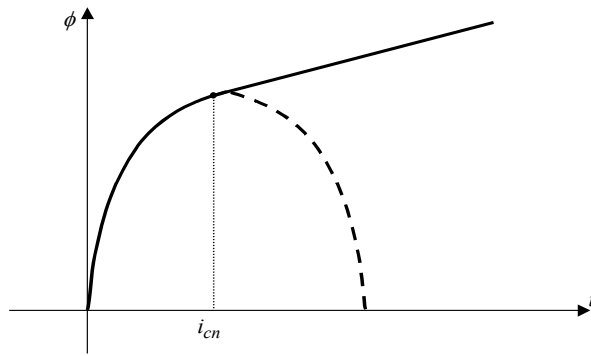
$$\mu = \frac{M}{M_H}, \quad i = \frac{I_A}{I_H}, \quad \phi = \frac{\Phi}{\Phi_H}, \quad v = \frac{\omega}{\omega_H}, \quad \tau = \frac{t}{T_M}, \quad (6)$$

де $M_H, I_H, \Phi_H, \omega_H$ — номінальні значення відповідно моменту, струму, магнітного потоку та кутової швидкості, а T_M — електромеханічна стала, яка визначається як

$$T_M = \frac{J\omega_H}{M_H}, \quad (7)$$

де J — приведений до вала електродвигуна момент інерції махових мас електропривода; при цьому струм якоря електродвигуна є одночасно і струмом його збудження, а модель характеристики намагнічування $\phi(i)$ має вигляд

$$\phi(i) = \begin{cases} -a_2 i^2 + b_2 i, & i \in [0, i_{\text{сп}}), \\ a_1 + b_1 i, & i \in [i_{\text{сп}}, \infty) - \end{cases} \quad (8)$$



Графік характеристики намагнічування $\phi(i)$ електричного двигуна при використанні моделі (8), (9)

і графічний образ, показаний на рисунку.

В граничній умові (5) параметр τ_k є відносним часом, за який трамвай долає відстань між сусідніми трамвайними зупинками, а в моделі (8) параметр $i_{сп}$ є відносним струмом спряження двох гілок характеристики намагнічування $\phi(i)$, який, як показано в роботі [2], знаходиться із співвідношення

$$i_{сп} = \frac{b_2 - b_1}{2a_2}. \quad (9)$$

Відштовхнувшись від отриманого в роботі

[3] рівняння

$$\frac{2i}{\phi + i \frac{d\phi}{di}} = \lambda_0 \tau + C \quad (10)$$

та моделі характеристики намагнічування (8), ми в роботі [1], розв'язуючи задачу оптимізації (1)—(5), отримали такі моделі для визначення екстремалей струму i та кутової швидкості v :

— на відкритому проміжку $[i_{сп}, \infty)$

$$i = \frac{a_1(C + \lambda_0 \tau)}{2(1 - b_1(C + \lambda_0 \tau))}; \quad (11)$$

$$v = \frac{a_1^2}{4\lambda_0 b_1} \left(\frac{1}{b_1(1 - b_1(C + \lambda_0 \tau))} - \frac{1}{b_1} - (C + \lambda_0 \tau) \right) - \mu_0 \tau + C_1; \quad (12)$$

— на відкритому проміжку $[0, i_{сп})$

$$i = \frac{2}{3a_2} \left(b_2 - \frac{1}{C + \lambda_0 \tau} \right); \quad (13)$$

$$v = \frac{4}{27a_2^2 \lambda_0} \left(b_2^3 (C + \lambda_0 \tau) + \frac{3b_2}{C + \lambda_0 \tau} - \frac{1}{(C + \lambda_0 \tau)^2} \right) - \mu_0 \tau + C_2. \quad (14)$$

А із співвідношень (9) та (11) ми в цій же роботі [1] знайшли, що

$$\frac{b_2 - b_1}{2a_2} = \frac{a_1(C + \lambda_0 \tau_{сп})}{2(1 - b_1(C + \lambda_0 \tau_{сп}))}, \quad (15)$$

де $\tau_{сп}$ — це відносний час, за який струм електродвигуна трамвая i після запуску електропривода спаде до значення $i_{сп}$.

І все то добре нами було визначено в роботі [1] допоки ми не наклали умову, щоб значення параметрів C і λ_0 в моделях (11)—(15) були незмінними на обох гілках траєкторії руху — як при виконанні умови

$$0 \leq i < i_{сп}, \quad (16)$$

так і при виконанні умови

$$i_{сп} \leq i < \infty. \quad (17)$$

Знайдені в роботі [1] за таких умов значення параметрів $C, \lambda_0, \tau_{\text{сп}}, C_1, C_2$ моделей (11)—(15) виявились непридатними для розв'язання конкретної практичної задачі оптимізації електропривода трамвая, оскільки задають лише один частковий випадок і той не в полі значень параметрів електродвигуна, який використовується в електроприводі трамвая.

А тому виникла необхідність у побудові нового алгоритму визначення параметрів моделей (11)—(15), що не використовуватиме умову незмінності параметрів C і λ_0 на обох гілках траєкторії руху трамвая, який ми назвали другою ітерацією алгоритму побудови математичних моделей в задачі оптимізації електропривода трамвая при його сталому навантаженні.

2. Виведення розрахункових співвідношень, що зв'язують між собою параметри $C, \lambda_0, \tau_{\text{сп}}, C_1, C_2$ математичних моделей (11)—(15) та побудова алгоритму їх визначення

Із викладеного вище випливає, що для конкретизації моделей (11)—(15) необхідно чисельно визначити множину параметрів

$$\Pi = \{C^{\text{ПР}}, C^{\text{УГ}}, \lambda_0^{\text{ПР}}, \lambda_0^{\text{УГ}}, C_1, C_2, \tau_{\text{сп}}\}, \quad (18)$$

де верхніми індексами «ПР» та «УГ» позначені режими роботи електропривода трамвая відповідно на умовних проміжках «пуск — розгін» (17) та «усталений рух—гальмування» (16).

В свою чергу з виразу (18) випливає, що для розв'язання поставленої задачі нам необхідно визначити сім взаємозв'язаних невідомих. А це можна однозначно зробити лише в тому випадку, коли для їх знаходження вдається скласти систему з сімох рівнянь, в кожне з яких будуть входити або всі сім невідомих, або якась частина з них.

Подивимось, чи маємо ми достатньо умов для складання таких рівнянь.

Зрозуміло, що з граничних умов (4), (5), (15), ми можемо отримати три необхідних рівняння. Ще два необхідних рівняння нам зададуть умови Вейерштрасса—Ердмана [3] на границі областей (17), (16), які для нашої задачі матимуть вигляд

$$(L - \dot{v}L_{\dot{v}})|_{\tau_{\text{сп}}+0} = (L - \dot{v}L_{\dot{v}})|_{\tau_{\text{сп}}-0}, \quad (19)$$

$$L_{\dot{v}}|_{\tau_{\text{сп}}+0} = L_{\dot{v}}|_{\tau_{\text{сп}}-0}, \quad (20)$$

де L — функція Лагранжа.

Шосте рівняння можна отримати розкривши і деталізувавши програму роботи електропривода трамвая, яка в загальному вигляді задана співвідношенням (2).

І останнє — сьоме рівняння ми вже маємо, оскільки воно отримане ще в роботі [1]. Повторимо його і тут, використавши верхній індекс «ПР».

Із початкової умови для струму якоря i —

$$\begin{cases} \tau = 0; \\ i = i_{\text{П}} \end{cases} \quad (21)$$

та моделі (11) для струму на проміжку $[i_{\text{сп}}, \infty)$ маємо —

$$i_{\text{П}} = \frac{a_1 C^{\text{ПР}}}{2(1 - b_1 C^{\text{ПР}})}. \quad (22)$$

Із (22) випливає, що

$$C^{\text{ПР}} = \frac{2i_{\text{П}}}{a_1 + 2b_1 i_{\text{П}}}. \quad (23)$$

Нагадаємо, що $i_{\text{П}}$ визначається за допомогою співвідношень (9), (10) роботи [1], тобто

$$i_{\text{П}} = \frac{U}{r_{\text{Я}}}, \quad (24)$$

де $u = \frac{U}{U_H}$ — відносне по відношенню до номінального U_H значення напруги контактної мережі, до якої підключений якір електродвигуна, а

$$r_{Я} = \frac{\sum R_{Я}}{R_H} = \frac{\sum R_{Я} I_H}{U_H} \quad (25)$$

відносне значення опору якірного ланцюга.

Почнемо послідовно виводити інші потрібні нам шість рівнянь.

Підставляючи v із (12) у (4), отримаємо

$$\frac{a_1^2}{4\lambda_0^{PP} b_1} \left(\frac{1}{b_1(1 - b_1 C^{PP})} - \frac{1}{b_1} - C^{PP} \right) + C_1 = 0, \quad (26)$$

а підставляючи v із (14) у (5), матимемо

$$\frac{4}{27a_2^2 \lambda_0^{YГ}} \left(b_2^3 (C^{YГ} + \lambda_0^{YГ} \tau_k) + \frac{3b_2}{C^{YГ} + \lambda_0^{YГ} \tau_k} - \frac{1}{(C^{YГ} + \lambda_0^{YГ} \tau_k)^2} \right) - \mu_0 \tau_k + C_2 = 0. \quad (27)$$

В рівнянні (26) маємо лише дві невідомі — λ_0^{PP} та C_1 (будемо вважати, що з виразу (23) нам вже відоме числове значення C^{PP}), тому в загальному вигляді його можна переписати так:

$$f_1(\lambda_0^{PP}, C_1) = 0. \quad (28)$$

А в рівнянні (27) маємо вже три невідомі — $\lambda_0^{YГ}$, $C^{YГ}$, C_2 , тож у загальному вигляді воно запишеться, як

$$f_2(\lambda_0^{YГ}, C^{YГ}, C_2) = 0. \quad (29)$$

Для виведення третього потрібного нам рівняння трансформуємо рівняння (15), скориставшись верхнім індексом «PP». Отримаємо

$$\frac{a_1 (C^{PP} + \lambda_0^{PP} \tau_{сп})}{2(1 - b_1 (C^{PP} + \lambda_0^{PP} \tau_{сп}))} = \frac{b_2 - b_1}{2a_2}. \quad (30)$$

В рівнянні (30) маємо дві невідомі — λ_0^{PP} , $\tau_{сп}$, тому в загальному вигляді, перенісши праву частину в ліву, його можна записати так:

$$f_3(\lambda_0^{PP}, \tau_{сп}) = 0. \quad (31)$$

Щоб вивести четверте і п'яте рівняння з умов (19), (20), необхідно задати функцію Лагранжа L для нашої задачі, яка відноситься до класу ізопериметричних.

Із виразів (1), (2), (3) випливає, що

$$L = I^2 + \lambda_0(\dot{\beta} - v) + \lambda_1(\dot{v} + \mu_0 - i\phi), \quad (32)$$

де, як показано в роботі [3],

$$\lambda_1 = C + \lambda_0 \tau. \quad (33)$$

Оскільки, як випливає з (32), —

$$L_{\dot{v}} = \lambda_1, \tag{34}$$

то із співвідношень (20), (33), (34) маємо четверте рівняння у вигляді

$$C^{PP} + \lambda_0^{PP} \tau_{сп} = C^{Y\Gamma} + \lambda_0^{Y\Gamma} \tau_{сп}, \tag{35}$$

яке містить в собі чотири невідомі: $\lambda_0^{PP}, C^{Y\Gamma}, \lambda_0^{Y\Gamma}, \tau_{сп}$ — і, після перенесення правої частини в ліву, може бути переписане в загальному вигляді, як

$$f_4(\lambda_0^{PP}, \lambda_0^{Y\Gamma}, C^{Y\Gamma}, \tau_{сп}) = 0. \tag{36}$$

Підставляючи значення L з (32) в умову (19), отримаємо

$$\left(i^2 + \lambda_0(\dot{\beta} - v) + \lambda_1(\dot{v} + \mu_0 - i\phi) - \lambda_1 \dot{v} \right) \Big|_{\tau_{сп}-0} = \left(i^2 + \lambda_0(\dot{\beta} - v) + \lambda_1(\dot{v} + \mu_0 - i\phi) - \lambda_1 \dot{v} \right) \Big|_{\tau_{сп}+0}. \tag{37}$$

Нагадаємо, що обмотка якоря електродвигуна має індуктивність, яка підсилюється індуктивністю послідовно з'єднаної з нею обмотки збудження, а тому струм якоря, який одночасно є і струмом збудження електродвигуна при переході електропривода трамвая із області «пуск—розгін» в область «усталений рух—гальмування», в момент часу $\tau = \tau_{сп}$ не можуть змінюватись скачком, тобто виконується рівність

$$i^{PP}(\tau_{сп}) = i^{Y\Gamma}(\tau_{сп}). \tag{38}$$

Як наслідок виконання рівності (38) матимемо і рівність магнітних потоків на границі вказаних областей, тобто

$$\phi^{PP}(\tau_{сп}) = \phi^{Y\Gamma}(\tau_{сп}). \tag{39}$$

Легко бачити, що з врахуванням рівностей (20), (34), (38), (39), друга умова Вейерштрасса—Ердмана для нашої задачі зводиться до рівності

$$v^{PP}(\tau_{сп}) = v^{Y\Gamma}(\tau_{сп}), \tag{40}$$

яку, підставляючи значення кутових швидкостей із виразів (12), (14), можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} & \frac{a_1^2}{4\lambda_0^{PP} b_1} \left(\frac{1}{b_1(1 - b_1(C^{PP} + \lambda_0^{PP} \tau_{сп}))} - \frac{1}{b_1} - (C^{PP} + \lambda_0^{PP} \tau_{сп}) \right) - \mu_0 \tau_{сп} + C_1 = \\ & = \frac{4}{27 a_2^2 \lambda_0^{Y\Gamma}} \left(b_2^3 (C^{Y\Gamma} + \lambda_0^{Y\Gamma} \tau_{сп}) + \frac{3b_2}{C^{Y\Gamma} + \lambda_0^{Y\Gamma} \tau_{сп}} - \frac{1}{(C^{Y\Gamma} + \lambda_0^{Y\Gamma} \tau_{сп})^2} \right) - \mu_0 \tau_{сп} + C_2. \end{aligned} \tag{41}$$

В рівності (41) маємо усі шість невідомих $C^{Y\Gamma}, \lambda_0^{PP}, \lambda_0^{Y\Gamma}, C_1, C_2, \tau_{сп}$. Переносячи його праву частину в ліву, в загальному вигляді матимемо

$$f_5(C^{Y\Gamma}, \lambda_0^{PP}, \lambda_0^{Y\Gamma}, C_1, C_2, \tau_{сп}) = 0. \tag{42}$$

Тепер перейдемо до конструювання останнього — шостого рівняння. Для цього програму роботи електропривода (2) представимо у вигляді

$$\beta = \int_0^{\tau_k} v d\tau = \int_0^{\tau_{сп}} v^{PP} d\tau + \int_{\tau_{сп}}^{\tau_k} v^{YГ} d\tau. \quad (43)$$

Підставляючи значення v^{PP} і $v^{YГ}$ із виразів (12), (14) у (43) та виконуючи інтегрування, отримаємо

$$\begin{aligned} \beta = & C_1 \tau_{сп} - \mu_0 \frac{\tau_{сп}^2}{2} - \frac{a_1^2 \tau_{сп}^2}{4 b_1^2 \lambda_0^{PP}} - \frac{a_1^2 C^{PP} \tau_{сп}}{4 \lambda_0^{PP} b_1} - \frac{a_1^2 \tau_{сп}^2}{8 b_1} + \frac{a_1^2}{4 b_1^3 (\lambda_0^{PP})^2} \ln \left| \frac{1 - b_1 C^{PP}}{1 - b_1 (C^{PP} + \lambda_0^{PP} \tau_{сп})} \right| + \\ & + C_2 \tau_k - C_2 \tau_{сп} - \mu_0 \frac{\tau_k^2}{2} + \mu_0 \frac{\tau_{сп}^2}{2} - \frac{4}{27 a_2^2 (\lambda_0^{YГ})^2 (C^{YГ} + \lambda_0^{YГ} \tau_{сп})} + \frac{4}{27 a_2^2 (\lambda_0^{YГ})^2 (C^{YГ} + \lambda_0^{YГ} \tau_k)} + \\ & + \frac{12 b_2}{27 a_2^2 (\lambda_0^{YГ})^2} \ln \left| \frac{C^{YГ} + \lambda_0^{YГ} \tau_k}{C^{YГ} + \lambda_0^{YГ} \tau_{сп}} \right| + \frac{4 b_2^3 C^{YГ} \tau_k}{27 a_2^2 \lambda_0^{YГ}} - \frac{4 b_2^3 C^{YГ} \tau_{сп}}{27 a_2^2 \lambda_0^{YГ}} + \frac{2 b_2^3 \tau_k^2}{27 a_2^2} - \frac{2 b_2^3 \tau_{сп}^2}{27 a_2^2}. \end{aligned} \quad (44)$$

Нагадаємо [3], що відносний кут β повороту ротора електродвигуна за відносний час τ_k зв'язаний з його кутом повороту в радіанах $\alpha_{ел}^k$ за час t_k співвідношенням

$$\beta = \frac{\alpha_{ел}^k}{\omega_H T_M}. \quad (45)$$

В свою чергу кут повороту осі колеса трамвая $\alpha_{кол}^k$, відповідний до $\alpha_{ел}^k$, знаходиться, як

$$\alpha_{кол}^k = \frac{\alpha_{ел}^k}{k_p}, \quad (46)$$

де k_p — коефіцієнт передачі редуктора від осі ротора електродвигуна до осі колеса.

Позначивши l_k — відстань між сусідніми трамвайними зупинками, а $l_{об}$ — довжину кола обода трамвайного колеса, кут повороту осі колеса $\alpha_{кол}^k$ за час руху між двома трамвайними зупинками t_k можна знайти із співвідношення

$$\alpha_{кол}^k = 2\pi \frac{l_k}{l_{об}} = \frac{l_k}{R}, \quad (47)$$

де R — радіус обода колеса трамвая.

Підставляючи (47) і (46) у (45), отримаємо:

$$\beta = \frac{\alpha_{ел}^k}{\omega_H T_M} = \frac{k_p \alpha_{кол}^k}{\omega_H T_M} = \frac{k_p l_k}{R \omega_H T_M}. \quad (48)$$

Переносячи праву частину рівняння (44) в ліву і враховуючи (48), отримаємо останнє — шосте рівняння

$$f_6(C^{YГ}, \lambda_0^{PP}, \lambda_0^{YГ}, C_1, C_2, \tau_{сп}) = 0 \quad (49)$$

для знаходження шести невідомих $C^{YГ}, \lambda_0^{PP}, \lambda_0^{YГ}, C_1, C_2, \tau_{сп}$.

Тож алгоритм визначення параметрів $C^{PP}, C^{YГ}, \lambda_0^{PP}, \lambda_0^{YГ}, C_1, C_2, \tau_{сп}$ математичних моделей

(11)—(15) в задачі оптимізації електропривода, заданій співвідношеннями (1)—(8), полягає в наступному: спочатку за допомогою виразу (23) з використанням (24) і (25) визначаємо $C^{\text{ПП}}$, а потім, підставивши отримане числове значення $C^{\text{ПП}}$ в рівняння (26), (27), (30), (35), (41) та (44), в яке підставляємо також числове значення параметра β із (48), отримаємо систему шести рівнянь

$$\begin{cases} f_1(\lambda_0^{\text{ПП}}, C_1) = 0; \\ f_2(\lambda_0^{\text{УГ}}, C^{\text{УГ}}, C_2) = 0; \\ f_3(\lambda_0^{\text{ПП}}, \tau_{\text{СП}}) = 0; \\ f_4(\lambda_0^{\text{ПП}}, \lambda_0^{\text{УГ}}, C^{\text{УГ}}, \tau_{\text{СП}}) = 0; \\ f_5(C^{\text{УГ}}, \lambda_0^{\text{ПП}}, \lambda_0^{\text{УГ}}, C_1, C_2, \tau_{\text{СП}}) = 0; \\ f_6(C^{\text{УГ}}, \lambda_0^{\text{ПП}}, \lambda_0^{\text{УГ}}, C_1, C_2, \tau_{\text{СП}}) = 0, \end{cases} \quad (50)$$

розв'язуючи яку сумісно знайдемо числові значення інших шести параметрів: $C^{\text{УГ}}, \lambda_0^{\text{ПП}}, \lambda_0^{\text{УГ}}, C_1, C_2, \tau_{\text{СП}}$.

Підставивши отримані значення параметрів $C^{\text{ПП}}, C^{\text{УГ}}, \lambda_0^{\text{ПП}}, \lambda_0^{\text{УГ}}, C_1, C_2, \tau_{\text{СП}}$ у математичні моделі (11)—(14), отримаємо закони зміни струму якоря i в кожному із чотирьох електродвигунів електропривода трамвая, як в області (16) так і в області (17), а також закони зміни кутової швидкості v обертання роторів цих електродвигунів, які доставляють мінімум функціоналу (1) за умови виконання програми (2) руху трамвая між двома сусідніми трамвайними зупинками.

Для переходу від відносних одиниць до іменованих в отриманих моделях необхідно використати співвідношення (6), (7).

3. Висновки

1. Для того, щоб електропривод трамвая витрачав мінімальну кількість електроенергії під час руху по маршруту від однієї зупинки до наступної, необхідно підтримувати значення струму в якорях його тягових електродвигунів та кутову швидкість обертання роторів цих електродвигунів у відповідності з моделями (11)—(14), один параметр яких обчислено з рівняння (23), а шість інших — із системи рівнянь (50).

2. Побудовані математичні моделі дають правильні результати лише тоді, коли виконуються три умови: по-перше, для характеристики намагнічування $\phi(i)$ електродвигуна застосовується модель (8), по-друге, пусковий струм $i_{\text{П}}$ електродвигуна є більшим за струм спряження $i_{\text{СП}}$, кількісне значення якого знайдене з виразу (9), а по-третє, струм якоря i після переходу в область (16) не залишає цю область уже до самої зупинки трамвая.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Математичні моделі в задачі оптимізації електропривода трамвая при його сталому навантаженні / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін // Вісник ВПІ. — 2004. — № 2. — С. 57—61.
2. Математична модель кривої намагнічування електричного двигуна постійного струму з послідовним збудженням для задач оптимізації / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін // Вісник ВПІ. — 2004. — № 1. — С. 45—47.
3. Петров Ю. П. Вариационные методы оптимального управления. — Ленинград: «Энергия». — 1965. — 220 с.

Рекомендована кафедрою моделювання і моніторингу складних систем

Надійшла до редакції 10.09.04
Рекомендована до друку 20.10.04

Мокін Борис Іванович — завідувач кафедри; **Мокін Олександр Борисович** — аспірант
Кафедра моделювання і моніторингу складних систем, Вінницький національний технічний університет