УДК 621.396

Р. Н. Квєтний, д. т. н., проф.;
Ю. А. Буняк

КОРЕЛЯЦІЙНИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРЯДКУ МОДЕЛІ АВТОРЕГРЕСІЇ

Розглянуто метод визначення оптимального порядку моделі авторегресії на основі структури оберненої кореляційної матриці. Проведено порівняльний аналіз методу з розкладанням за сингулярними числами. Роботу методу досліджено на прикладі оцінювання спектральної щільності потужності тестової послідовності.

Для спектрального аналізу випадкових процесів і детермінованих сигналів на фоні шуму, моделювання динамічних систем в техніці та економіці використовують модель процесу авторегресії (АР) [1]

$$x_n = -\sum_{i=1}^{p} a_i x_{n-i} + \xi_n , \tag{1}$$

де a_i — параметри АР, x_n— відліки даних об'ємом N, ξ_n — відліки білого шуму, що характеризується дисперсією σ^2, $n = p, p + 1, \ldots, p$ — порядок моделі. Для визначення параметрів моделі використовують різні форми методу найменших квадратів (МНК). В роботах [2, 3] запропоновано метод лінійної симетрії (ЛС) кореляційної матриці на основі рівняння та умови максимальної правдоподібності. Для розв'язання задачі МНК і ЛС необхідно виконати обернення кореляційної матриці, що можливо за умови її чисельної обумовленості, або не виродженості, і залежить від її розміру. В залежності від методу розмір кореляційної матриці визначається порядком моделі АР як $p \times p$ або $(p+1)\times(p+1)$. Отже, вибір порядку моделі АР (1) є важливою задачею і тому йому приділяють постійну увагу [1, 4—6]. Разом з тим, чіткого однозначного методу визначення порядку не існує, а рекомендації, наведені у вказаних роботах, можна звести до одного правила: порядок моделі варто вибирати максимально високим, але він повинен бути обмежений зверху умовою чисельної обумовленості кореляційної матриці. Найефективнішим способом аналізу чисельної обумовленості матриць є розкладання за сингулярними числами (SVD – Singular Value Decomposition). Найменше сингулярне число (СЧ) показує, наскільки матриця близька до виродженої. Однак, операція SVD матриць великого розміру досить трудомістка і визначити порядок моделі за допомогою SVD можна тільки для вузького класу процесів, наприклад суми синусоїд на фоні білого шуму [1, 6—8], коли присутня чітка границя в розподілі СЧ по величині, що визначає число синусоїд. Тому актуальною задачею є визначення оптимального порядку на основі аналізу структури кореляційної матриці, що безпосередньо використовується для розв'язання задачі створення моделі.

Визначимо вибіркову кореляційну матрицю розміром $(p+1)\times(p+1)$ як

$$R_{p+1}(i,k) = (N-p-1)^{-1} \sum_{m=0}^{N-p-2} x_{i+m} x_{k+m}, \quad i, k = 0, 1, \ldots, p. \tag{2}$$

В роботі [3] для параметрів АР процесу, що заданий кореляційною матрицею (2), знайдено вираз

$$a_{p-i} = \rho_{i,p}\rho_{p,p}^{-1}; \quad i = 0, \ldots, p-1, \tag{3}$$

де $\rho_{i,p}$ — елементи останнього стовпця $\rho_{(p)}$ оберненої кореляційної матриці R_{p+1}^{-1}. Дисперсія шуму визначена як

$$\sigma^2 = \rho_{p,p}^{-1}. \tag{4}$$

Доведено, що параметри (3) оптимальні за точністю, з якою вони можуть бути знайдені для заданої оцінки вибіркової кореляційної матриці R_{p+1}. Відповідно, оцінка дисперсії (4) оптимальна за величиною.

Із виразу (4) можна зробити такі висновки:

— дисперсія шуму (4) оптимальна, коли порядок моделі обраний за умови чисельної обумовленості кореляційної матриці;

— дисперсія шуму (4) мінімальна і має фізичний зміст, коли елемент $\rho_{p,p}$ додатний і є одним з максимумів функції $\rho_{(p)}$.

На основі даних висновків можна запропонувати метод визначення оптимального порядку моделі АР (1):

— обчислити кореляційну матрицю максимального розміру $p_{\max}$, що дозволяє виконати операцію обернення або псевдообернення [1];

— обчислити останній стовпець оберненої матриці;

— знайти перший максимум останнього стовпця, починаючи від останнього елемента, і прийняти його номер у якості $p + 1$;

— перевизначити кореляційну матрицю нового розміру і за умови, що останній елемент останнього стовпця її оберненої матриці додатний, то p обрано правильно, якщо ні, то в залежності від зростання чи спадання значень останнього стовпця змінити порядок убік збільшення чи зменшення.

Порівняємо даний метод з SVD кореляційної матриці на прикладі тестової послідовності, що наведена в роботі [4]. Тестова послідовність містить три синусоїди з амплітудами 0,1; 1,0; 1,0 і відносними частотами 0,1; 0,2; 0,21. В області частот 0,2..0,5 присутній зафарбований гаусовий шум. Об'єм вибірки складає 64 відліки. Автори роботи обрали для моделі АР порядок $p = 16$. На рис. 1 показані упорядковані за величиною СЧ, на рис. 2 — функція $\rho_{(15)}$. На рис. 3 та 4 наведені СЧ кореляційної матриці максимального розміру $p = 33$ і функція $\rho_{(32)}$.

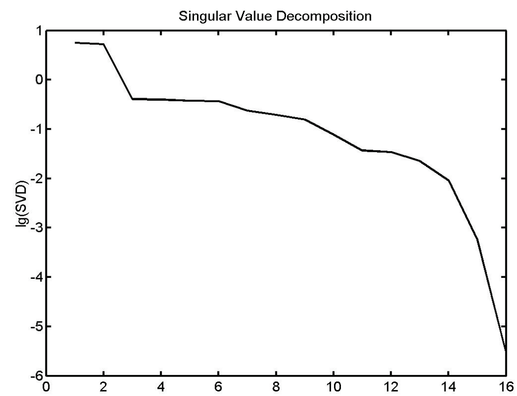

Рис. 1. Розподіл сингулярних чисел за величиною, якщо $p = 16$

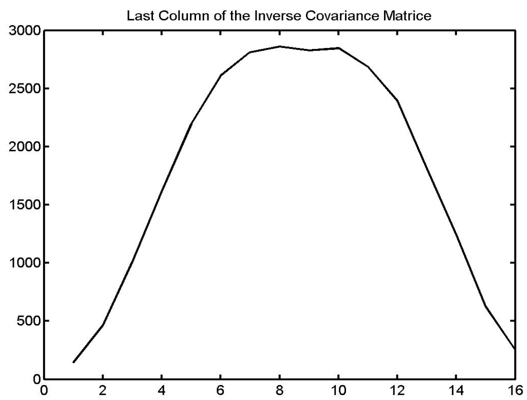

Рис. 2. Функція $\rho_{(15)}$

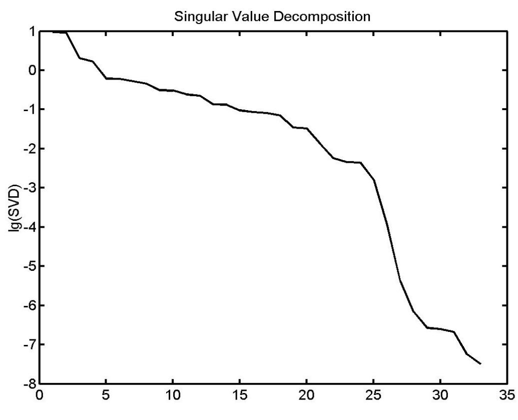

Рис. 3. Розподіл сингулярних чисел за величиною, якщо p = 33

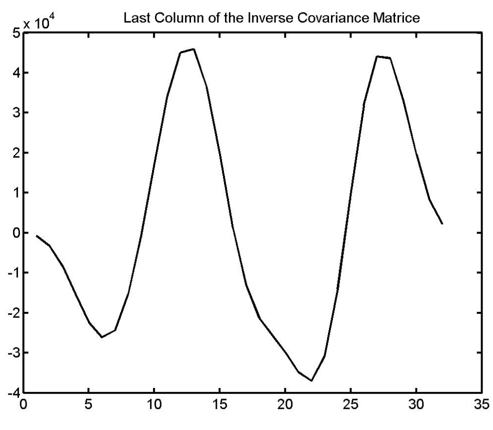

Рис. 4. Функція $\rho_{(32)}$

Як видно з рисунків, максимум функції $\rho_{(15)}$ не збігається з перепадом СЧ за величиною, тоді як один з максимумів функції $\rho_{(32)}$ збігається з найбільшим перепадом СЧ за величиною. Даний перепад і максимум функції вказують, що кореляційна матриця добре чисельно обумовлена, якщо $p \leq 26$, тому можна зробити такі висновки:

— порядок моделі $p = 16$ недостатній;

— максимальний оптимальний порядок $p_{\max\ opt} + 1 = 26$.

Встановлено, що вид функції $\rho_{(15)}$ зі зменшенням порядку не змінюється, із збільшенням порядку вид функції $\rho_{(p)}$ стає аналогічним $\rho_{(32)}$, якщо $p + 1 = 20$, тому можна визначити оптимальний мінімальний порядок $p_{\max\ opt} + 1 = 20$. Тестовий сигнал був змінений шляхом зменшення і збільшення числа синусоїд, при цьому форма функцій $\rho_{(p)}$ суттєво не змінювалась. Така властивість свідчить про те, що структура кореляційної матриці в даному випадку визначається сигналом з суцільним спектром. Тому кореляційний підхід до аналізу структури сигналу можна вважати цілком об’єктивним.

Експериментальний аналіз визначення спектральної щільності потужності за методом формувального фільтра [9] на основі унітарної моделі АР [2] та оптимальної за точністю (3) показав, що коли порядок моделі вибраний в діапазоні $p_{\min\ opt} \leq p \leq p_{\max\ opt}$, то спектр характеризується обвідною, що близька до реальної, надрозподілом близьких гармонік за частотою і значенням дисперсії шуму, що мало залежить від порядку моделі. Коли порядок вибраний за межами оптимального інтервалу, то унітарна модель АР, корені характеристичного поліному якої лежать на одиничному колі в комплексній області, втрачає стійкість.

Таким чином, через недостатньо високий порядок ряд методів спектрального аналізу, що аналізували автори роботи [4], дали негативні результати. Представлений в роботі кореляційний метод визначення порядку моделі АР значно простіший в порівнянні з SVD і тому може застосовуватись як для створення моделей АР, так і для таких задач, як виявлення зміни динаміки числових рядів та інших.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. — М.: Мир, 1988. — 584 с.

2. Буняк Ю. А. Спектральный анализ на основе линейной симметрии корреляционной матрицы // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 1992. — Т. 35. — № 8. — С. 8—14.

3. Буняк Ю. А. Спектральный анализ методом максимального правдоподобия на основе линейной симметрии корреляционной матрицы // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 1994. — Т. 37. — № 5. — С. 46—53.

4. Кей С. М., Марпл-мл. С. Л. Современные методы спектрального анализа: Обзор // ТИИЭР. — 1981. — Т. 69. — № 11. — С. 5—51.

5. Wax M. Orther selection for AR models by predictive least squares // IEEE Trans. ASSP. — 1988. — V. 36. — № 4. — P. 581—588.

6. Тафтс Д. У., Кумаресан Р. Оценивание частот суммы нескольких синусоид: Модификация метода линейного предсказания, сравнимая по эффективности с методом максимального правдоподобия // ТИИЭР. — 1982. — Т. 70. — № 9. — С. 77—94.

7. Волочков Е. Б., Гармаш В. Н. Оценивание числа гармонических сигналов на основе сингулярного разложения матрицы данных // Известия РАН. Радиотехника и электроника. — 1990. — Т. 35. — № 10. — С. 2098—2103.

8. Буняк Ю. А. Определение координат источников излучения по методу факторизации матриц отсчетов данных антенных решеток // Известия РАН. Радиотехника и электроника. — 1995. — Т. 40. — № 8. — С. 1231—1237.

9. Буняк Ю. А. Спектральный анализ по методу инвариантного к динамике сигнала формирующего фильтра // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 1996. — Т. 39. — № 3. — С. 53—60.

Рекомендована кафедрою автоматики та інформаційно-вимірювальної техніки

Надійшла до редакції 1.04.05
Рекомендована до друку 5.04.05

Квєтний Роман Наумович — завідувач кафедри автоматики та інформаційно-вимірювальної техніки.
Вінницький національний технічний університет;
Буняк Юрій Анатолійович – головний спеціаліст ІВП «ІнноВінн», м. Вінниця