

УДК 621.311.25

В. В. Богачук;**О. М. Головченко, к. т. н., доц.;****В. В. Кухарчук, д. т. н., проф.**

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ КОНВЕКТИВНОГО СУШІННЯ СИПКИХ МАТЕРІАЛІВ

Виконано дослідження процесу сушіння на математичній моделі, в результаті яких визначено зміни параметрів процесу в часі та вплив на ці параметри коефіцієнтів тепловіддачі та сушіння.

Вступ

Сушіння є типовим масообмінним процесом, під час якого якомога волога переміщується від матеріалу до сушильного агента. Сушінню підлягають різні харчові продукти, напівфабрикати та сировина. Процес сушіння здійснюється за рахунок підведеного до продукту тепла, завдяки якому відбувається випаровування вологи. Як сушильний агент застосовується повітря і перегріта пара, які насичуються вологою, що випаровується з матеріалу.

Основною метою технологічного процесу сушіння є забезпечення заданого значення вологості продукту, що сушиться, зі збереженням його якості. Якість матеріалу, що сушиться, має обмеження. Оскільки якість продукту під час сушіння визначається температурою нагріву матеріалу і експозицією, то ці параметри і є параметрами обмеження. Дії сушильного агента визначають основні параметри — витрати (швидкість) і температура сушіння, а іноді ще – витрати матеріалу, що сушиться. Інші вхідні параметри стабілізують на вході або відносять до впливних величин.

Інформативним параметром якості сипких матеріалів є вологість, значення якої має знаходитись в межах від 3,5 % до 4,5 %. В теперішній час контроль вологості здійснюють прямими і опосередкованими методами. Прямі методи [1] є високоточними, але мають дуже низьку швидкість і тому не можуть застосовуватися безпосередньо для автоматичного контролю вологості в процесі сушіння. Опосередковані методи [1] характеризуються високою швидкістю, але мають не високу точність, що призводить до зниження можливості контролю і суттєвого збільшення ризиків споживача і виробника.

Для розроблення сучасних засобів автоматизованого контролю вологості сипких матеріалів, які за швидкістю і можливістю контролю задовольняли б вимоги виробника, необхідні математичні моделі, які адекватно описують технологічний процес сушіння. Відомі математичні моделі [2—4], розроблені для розв'язання задач проектування технічних засобів сушарок різного типу та систем керування процесом сушіння. Оскільки процесу розробки автоматизованих засобів контролю передує процес дослідження об'єкта контролю, то застосувати ці підходи як вихідні неможливо.

Метою даної роботи є розроблення математичної моделі конвективного сушіння, яка дозволяє вибрати схему та устаткування системи автоматичного управління (САУ) сушарки.

Розробка математичної моделі

Схема сушарки показана на рис. 1. В сушарку 1 знизу подається гаряче повітря, яке виходить через верхню частину сушарки. В сушарці знаходиться матеріал 2, який підсушується. Матеріал рухається з відомою швидкістю. Необхідно визначити зміни в часі температур та вологості повітря та матеріалу.

Отримаємо математичну модель процесу сушіння у вигляді системи диференціальних рівнянь збереження конвективної сушарки енергії для повітря, збереження енергії для матеріалу, збереження маси для сухого матеріалу та

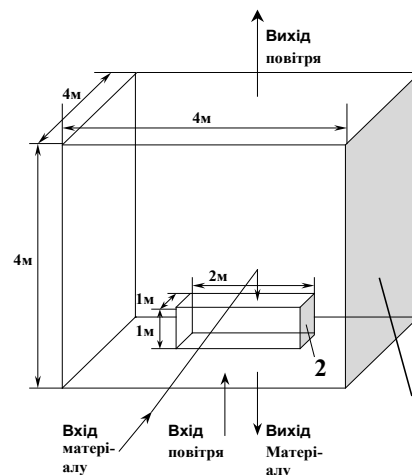


Рис. 1. Схема конвективної сушарки

рівняння збереження маси для вологи в повітрі.

Рівняння збереження енергії для повітря. Вихідним тут є рівняння теплового балансу для часу t

$$\Delta Q_M = \Delta Q_{II} = M_{II} (h_1 - h_2), \quad (1)$$

де $\Delta Q_M, \Delta Q_{II}$ — теплота, сприйнята матеріалом та віддана повітрям; M_{II}, h — маса та ентальпія повітря.

Запишемо рівняння (1) для проміжку часу dt . За законом Ньютона—Ріхмана для конвективної тепловіддачі

$$\Delta Q_M = \alpha_{II} F_M \left(\frac{T_{II} + T_{2II}}{2} - \frac{T_M + T_{2M}}{2} \right) dt, \quad (2)$$

де α_{II} — коефіцієнт тепловіддачі від повітря до матеріалу; F_M — поверхня матеріалу; T_{II}, T_M — температури повітря і матеріалу. Повітря віддасть теплоту в кількості

$$\Delta Q_{II} = (M_{II} + dM_{II}) [h_1 - (h_2 - dh_2)], \quad (3)$$

де dM_{II} — приріст маси повітря за проміжок часу dt , dh_2 — зміна ентальпії повітря.

Прирівнявши (2) до (3) та поділивши на dt , отримуємо рівняння теплового балансу

$$M_{II} \frac{dh_2}{dt} = L_{II} h_2 - L_{II} h_1 + \alpha_{II} F_M \left(\frac{T_{II} + T_{2II}}{2} - \frac{T_M + T_{2M}}{2} \right), \quad (4)$$

де $L_{II} = \frac{dM_{II}}{dt}$ — витрати повітря.

Рівняння збереження маси для вологи в повітрі. Врахувавши, що за час dt вологість матеріалу зміниться на dw_2 , а вологість повітря зміниться на dw_2 , отримаємо рівняння збереження маси для даного випадку

$$M_M dw_2 = M_{II} dd_2; \quad (5)$$

$$\frac{dd_2}{dt} = \frac{M_M}{M_{II}} \frac{dw_2}{dt}. \quad (6)$$

Рівняння збереження енергії для матеріалу. Вихідним для цього випадку є рівняння (1). Протягом часу dt температура матеріалу T_{2M} зміниться на величину dT_{2M} :

$$c_M M_M \frac{dT_{2M}}{dt} = \alpha_{II} F_M \left(\frac{T_{II} + T_{2II}}{2} - \frac{T_M + T_{2M}}{2} \right), \quad (7)$$

де c_M — теплоємність матеріалу.

Рівняння збереження маси для вологи в матеріалі. Вихідним є рівняння

$$\Delta W_C = \Delta W_M, \quad (8)$$

де $\Delta W_C, \Delta W_M$ — кількість видаленої вологи в процесі сушіння та зміна кількості вологи в матеріалі.

Величину ΔW_C визначимо з [1]:

$$k F_M (w_2 - w_p) dt = -M_M dw_2 \quad (9)$$

або

$$-M_M \frac{dw_2}{dt} = k F_M (w_2 - w_p), \quad (10)$$

де k — коефіцієнт сушіння, w_p — рівноважна вологість.

Рівняння приросту маси повітря було наведено вище. Рівняння приросту маси матеріалу матиме вигляд

$$\frac{dM_M}{dt} = L_M, \quad (11)$$

де dM_M — приріст маси матеріалу протягом проміжку часу dt , L_M — витрата матеріалу.

В рівнянні (4) змінною є ентальпія h_2 . Визначимо h_2 за допомогою рівняння, наведеного в [5]

$$h = 1,004 t + 2500 d + d 1,84 t. \tag{12}$$

Тоді

$$h_1 = 1,004 T_{1п} + 2500 d_1 + d_1 1,84 T_{1п}, \tag{13}$$

$$h_2 = 1,004 T_{2п} + 2500 d_2 + d_2 1,84 T_{2п}. \tag{14}$$

Продиференціюємо h_2

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{dT_{2п}}{dt} (1,004 + 1,84 d_2) + 2500 \frac{dd_2}{dt} + 1,84 \frac{dd_2}{dt} T_{2п}. \tag{15}$$

Прирівнявши (4) до (15), матимемо

$$\frac{dT_{2п}}{dt} = \frac{1}{1,004 + 1,84 d_2} \left[\frac{L_{п}}{M_{п}} (1,004 T_{2п} + d_2 2500 + T_{2п} d_{2п} 1,84) - \frac{L_{п}}{M_{п}} h_1 + \frac{\alpha_{пм} F_M}{M_{п}} \left(\frac{T_{1п} + T_{2п}}{2} - \frac{T_{1м} + T_{2м}}{2} \right) - 2500 \frac{dd_2}{dt} - 1,84 \frac{dd_2}{dt} T_{2п} \right]. \tag{16}$$

Визначимо витрати повітря та матеріалу. Введемо такі позначення:

$$L_{п} = S_c \vartheta_{п} \rho_{п}; \quad L_M = S_M \vartheta_M \rho_M; \tag{17}$$

$$10^{-3} \frac{\alpha_{пм}}{2 i_{п}} F_M = A; \quad \frac{L_M}{i_{п}} = B; \quad \frac{k F_M}{i_M} = \tilde{N}; \quad \frac{\alpha_{пм} F_M 10^{-3}}{\tilde{N} i_M 2} = D; \quad \frac{L_{п}}{M_{п}} = E, \tag{18}$$

де S_c, S_M — перерізи робочої камери сушарки та контейнера з матеріалом, $\vartheta_{п}, \vartheta_M$ — швидкості повітря і матеріалу, $\rho_{п}, \rho_M$ — густини повітря і матеріалу.

Тоді рівняння (16) прийме вигляд

$$\frac{dT_{2п}}{dt} = \frac{1}{1,004 + 1,84 d_2} \left[E (1,004 T_{2п} + d_2 2500 + T_{2п} d_{2п} 1,84) - E h_1 + 2 A \left(\frac{T_{1п} + T_{2п}}{2} - \frac{T_{1м} + T_{2м}}{2} \right) + 2500 \frac{dd_2}{dt} - 1,84 \frac{dd_2}{dt} T_{2п} \right]. \tag{19}$$

Введемо такі позначення:

$y_1 = T_{2п}$ — кінцева температура повітря; $y_2 = d_2$ — кінцева вологість повітря; $y_3 = W_{2м}$ — кінцева вологість матеріалу; $y_4 = T_{2м}$, — кінцева температура матеріалу; $y_5 = M_M$ — маса матеріалу; $y_6 = M_{п}$ — маса повітря.

Використавши ці позначення запишемо систему рівнянь математичної моделі (19) конвективного сушіння у вигляді, зручному для комп'ютерного моделювання:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \frac{1}{1,004 + 1,84 y_2} \left[E (1,004 y_1 + 2500 y_2 + 1,84 y_1 y_2) - E h + 2 A \left(\frac{T_{1п} + y_1}{2} - \frac{T_{1м} + y_4}{2} \right) + 2500 y_2' - 1,84 y_2' y_1 \right]; \\ \dot{y}_2 = \frac{y_5}{y_6} y_3'; \\ \dot{y}_3 = - C y_3 + C W_p; \\ \dot{y}_4 = D T_{1п} + D y_1 - D T_{1м} - D y_4; \\ \dot{y}_5 = L_M; \\ \dot{y}_6 = L_{п}. \end{cases} \tag{20}$$

Граничні умови:

$$y_1 = T_{1п}; \quad y_2 = d_1; \quad y_3 = W_1; \quad y_4 = T_{1м}; \quad y_5 = V_M \rho_M; \quad y_6 = V_{п} \rho_{п},$$

де V_m, V_n – об'єми контейнера з матеріалом та робочої камери сушарки.

Результати моделювання

Розв'язок системи рівнянь (20) здійснено в програмному середовищі, в якому використано метод Кутта-Мерсона для системи звичайних диференціальних рівнянь з автоматичним вибором кроку [6].

Вихідні дані до програми показані в табл. 1.

Таблиця 1

Вихідні дані до моделювання

№	Найменування	Позначення	Значення	Розмірність
1	Початкова температура гарячого повітря	$T_{1Г}$	150	°С
2	Початкова вологість повітря	$D_{1П}$	0,01	кг/кг
3	Початкова температура матеріалу	$T_{1М}$	20	°С
4	Початкова вологість матеріалу	$W_{1М}$	0,3	кг/кг
5	Коефіцієнт тепловіддачі від повітря	$\alpha_{ПМ}$	20	Вт/м ² гр
6	Поверхня матеріалу	F_M	10	м ²
7	Швидкість повітря	$\vartheta_{Г}$	0,5	м/с
8	Об'єм матеріалу	V_M	2	м ³
9	Швидкість матеріалу	ϑ_M	0,05	м/с
10	Теплоємність матеріалу	c_M	2	кДж/кг·гр
11	Рівноважна вологість	W_D	0,02	кг/кг
12	Густина матеріалу	ρ	750	кг/м ³
13	Коефіцієнт сушіння	K	0,001	1/с
14	Об'єм сушарки	V_c	96	м ³
15	Початок інтервалу часу	t_0	0	с
16	Кінець інтервалу часу	t_1	100	с
17	Крок інтегрування початковий	Dt	1	с
18	Температура гарячого повітря на початку інтервалу часу	$T_{20Г}$	150	°С
19	Вологість повітря на початку інтервалу часу	α_{20}	0,01	кг/кг
20	Температура матеріалу на початку інтервалу часу	$T_{2М0}$	20	°С
21	Вологість матеріалу на початку інтервалу часу	W_{20}	0,3	кг/кг
22	Площа поперечного перерізу сушарки	S_c	16	м ²
23	Площа поперечного перерізу матеріалу	S_M	2	м ²

Результати роботи програми показані в табл. 2.

Таблиця 2

Результати розрахунку параметрів конвективної сушарки

	Найменування	Позначення	Значення	Розмірність
1	Маса повітря	$M_{Г}$	124,8	кг
2	Маса матеріалу	$M_{М}$	1500	кг
3	Витрата повітря	$L_{Г}$	37440	кг/год
4	Витрата матеріалу	$L_{М}$	2700	кг/год
5	Кінцева температура повітря	$T_{2Г}$	125,62	°С
6	Кінцева вологість повітря	$d_{2Г}$	0,012	кг/кг
7	Кінцева вологість матеріалу	$W_{2М}$	0,2991	кг/кг
8	Кінцева температура матеріалу	$T_{2М}$	20,192	°С
9	Остаточний крок інтегрування	dt	0,5	°С
10	Кількість теплоти, сприйнятої матеріалом	ΔQ_M	593,23	кДж
11	Кількість теплоти, відданої повітрям	$\Delta Q_{П}$	565,03	кДж
12	Кількість вологи, відданої матеріалом	ΔW_M	1,461	кг
13	Кількість вологи, сприйнятої повітрям	$\Delta W_{П}$	1,461	кг
14	Розрахункова кількість вологи сушіння	ΔW_c	1,4613	кг

Розроблена програма дозволяє також будувати залежності $T_{2П} = f(t)$; $d_2 = f(t)$;

$$W_{2M} = f(t); T_{2M} = f(t).$$

Результати розрахунків зміни в часі $T_{2П}$, d_2 , T_{2M} , W_{2M} з різними $\alpha_{ПМ}$, та різних k наведені в табл. 3 та табл. 4.

Таблиця 3

Результати моделювання для $\alpha_{ПМ} = \text{var}, k = 0,01$

t	$\alpha_{ПМ} = 10$				$\alpha_{ПМ} = 20$				$\alpha_{ПМ} = 30$			
	$T_{2П}$	d_2	T_{2M}	W_{2M}	$T_{2П}$	d_2	T_{2M}	W_{2M}	$T_{2П}$	d_2	T_{2M}	W_{2M}
0	150	0,01	20	0,3	150	0,01	20	0,3	150	0,01	20	0,3
60	129	0,0141	20,2	0,299	128,5	0,0141	20,4	0,299	127,8	0,0141	20,6	0,299
600	126	0,0189	21,6	0,292	125,1	0,0189	23,3	0,291	124,4	0,0189	24,9	0,292
2400	125,6	0,0220	25,0	0,276	124,8	0,0219	29,7	0,276	124,2	0,0219	34,3	0,276
3600	125,6	0,0227	26,4	0,270	124,8	0,0227	32,6	0,269	124,2	0,0227	38,5	0,269
4800	125,6	0,0230	27,6	0,264	124,8	0,0233	34,9	0,264	124,2	0,0233	41,9	0,264
6000	125,6	0,0237	28,6	0,259	124,8	0,0237	36,8	0,259	124,2	0,0237	44,6	0,259
7200	125,6	0,0241	29,4	0,256	124,9	0,0241	38,4	0,255	124,2	0,0241	47,0	0,255

Таблиця 4

Результати моделювання для $k = \text{var}, \alpha_{ПМ} = 10$

t	$k = 0,01$				$k = 0,1$				$k = 0,001$			
	$T_{2П}$	d_2	T_{2M}	W_{2M}	$T_{2П}$	d_2	T_{2M}	W_{2M}	$T_{2П}$	d_2	T_{2M}	W_{2M}
0	150	0,01	20	0,3	150	0,01	20	0,3	150	0,01	20	0,3
60	129	0,014	20,19	0,299	129,1	0,05	20,2	0,291	129,1	0,0104	20,2	0,299
600	125	0,019	21,7	0,291	125,8	0,093	21,6	0,227	125,8	0,0109	21,6	0,299
2400	125,6	0,022	25	0,276	125,6	0,112	24,9	0,132	125,6	0,011	25	0,297
3600	125,6	0,023	26,4	0,27	125,6	0,116	26,4	0,102	125,6	0,011	26,4	0,296
4800	125,6	0,023	27,6	0,264	125,6	0,118	27,6	0,08	125,6	0,011	27,6	0,296
6000	125,6	0,024	28,6	0,259	125,6	0,12	28,6	0,07	125,6	0,011	28,6	0,295
7200	125,6	0,024	29,4	0,255	125,6	0,12	29,4	0,06	125,6	0,011	29,4	0,295
14400	125,5	0,025	32,9	0,24	125,6	0,12	32,9	0,03	125,6	0,011	32,8	0,293

Як видно з табл. 3 та табл. 4, коефіцієнт тепловіддачі найбільше впливає на температуру матеріалу, а коефіцієнт сушки — на кінцеву його вологість. Помітимо, що в наведеній моделі є спрощення: не враховані впливи на час сушки наявність транспортера для переміщення матеріалу, рух рідини в матеріалі до поверхні випаровування та інші. Підвищити точність моделі можна ідентифікацією її за експериментальними даними. Це досягається визначенням коефіцієнтів тепловіддачі та сушіння методом найменших квадратів та, в разі необхідності, доповненням моделі корегувальними рівняннями.

Перетворимо систему диференціальних рівнянь (20) за Лапласом і отримаємо:

$$y_1(p) = \frac{1}{p} \left[\frac{1}{1,004 + 1,84y_2(p)} \left[E(1,004y_1(p) + 2500y_2(p) + 1,84y_1(p)y_2(p)) - Eh_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2A \left(\frac{t_{П} + y_1(p)}{2} - \frac{t_{М} + y_4(p)}{2} \right) - 2500py_2(p) - 1,84py_1(p)y_2(p) \right] \right]; \quad (21)$$

$$y_2(p) = - \frac{y_5(p) y_3(p)}{y_6(p)}; \quad (22)$$

$$y_3(p) = \frac{1}{p} (-Cy_3(p) + CW_p); \quad (23)$$

$$y_4(p) = \frac{1}{p} [D(t_{П} - t_{М} + y_1(p) - y_4(p))]; \quad (24)$$

$$y_5(p) = \frac{L_M}{p}; \tag{25}$$

$$y_6(p) = \frac{L_{II}}{p}. \tag{26}$$

Підставимо рівняння (25) і (26) в рівняння (22) і матимемо:

$$y_1(p)[1,004 + 1,84F] = \frac{1}{p} \left[E(1,004y_1(p) + 2500F + 1,84y_1(p)F) - Eh_1 + \left(\frac{t_{II} + y_1(p)}{2} - \frac{t_{IM} + \frac{D(t_{II} - t_{IM} + y_1(p))}{p + D}}{2} \right) - 2500pF - 1,84py_1(p)F \right], \tag{27}$$

де $F = -\frac{L_M}{L_{II}}(C_{Y_3}(p) + C_{W_p})\frac{1}{p}$.

Розв’язок (27) виконано в середовищі пакету прикладних програм «MATLAB». Спочатку для часу t програмою розв’язання системи рівнянь (20), визначалися коефіцієнти A, B, C, D, E . Далі значення цих коефіцієнтів підставлялися в рівняння (27), яке розв’язувалось в межах ± 5 °C до температур повітря і матеріалу відповідних часу сушіння t .

Для прикладу розрахуємо значення коефіцієнтів для моменту часу 60 с і підставимо їх в (27)

$$A = 0,8 \cdot 10^{-3}; \quad C = 0,067 \cdot 10^{-3}; \quad D = 0,03 \cdot 10^{-3}; \quad E = 299,52; \quad h_{II} = 176,448.$$

Отримаємо таке рівняння:

$$y_3(p) = \frac{y_1(p)(1,004p^2 - 300,7p - 9,8 \cdot 10^{-3}) + 299,52h_1 \cdot (p + 0,003 \cdot 10^{-3})y_1(p) - 0,104}{y_1(p)(1,004p^2 - 300,7p - 9,8 \cdot 10^{-3}) - 53733py_1(p) - 1,62}. \tag{28}$$

Останнє рівняння однозначно пов’язує вхідну величину y_1 — температуру гарячого повітря та вихідну y_3 — вологість матеріалу. Схема математичного моделювання представлена на рис. 2, а результати моделювання показані на рис. 3.

З рис. 3 видно, що зі зростанням температури гарячого повітря вологість матеріалу зменшується, але починаючи зі значення температури 130 °C вологість готового продукту залишається сталою і наближається до нормованого значення 4 %.

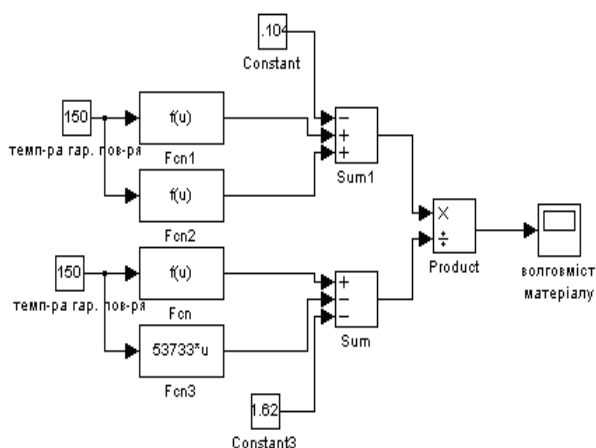


Рис. 2. Схема моделювання конвективної сушарки

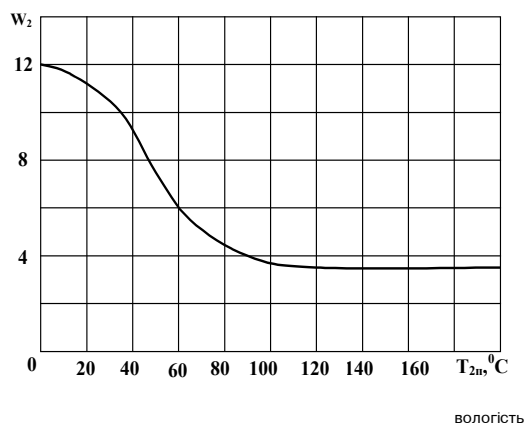


Рис. 3. Залежність вологості матеріалу від температури гарячого повітря

Висновки

1. Розроблено математичну модель процесу конвективного сушіння у вигляді системи диференціальних рівнянь та програму для її розв'язку методом Кута-Мерсона. Порівнянням результатів моделювання та відомих емпіричних залежностей [7] доведено, що запропонована модель адекватно описує фізичні процеси, які протікають під час конвективного сушіння сипких матеріалів.

2. Отримано рівняння (28), що однозначно пов'язує вхідну величину (температуру гарячого повітря) та вихідну — вологість матеріалу. Встановлено зв'язок між допусками на контрольований параметр (3,5 %...4,5 %) і відповідними змінами температури гарячого повітря (70...130 °С). Показано вплив неінформативних параметрів (коефіцієнтів тепловіддачі та сушіння) на значення вологості матеріалу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Липатов Н. Н., Харитонов Н. Н. Сухое молоко. — М.: Легкая и пищевая промышленность, 1981. — 264 с.
2. Лебедев П. Д. Расчет и проектирование сушильных установок. — М.: — Л.: Госэнергоиздат, 1962. — 320 с.
3. Гинзбург А. С. Расчет и проектирование сушильных установок пищевой промышленности. — М.: Агропромиздат, 1985. — 336 с.
4. Богачук В. В., Мокін Б. І. Аналіз основних математичних моделей та похибок обчислення вихідних параметрів процесу сушки молока. — Кн. За матеріалами четвертої міжнародної науково-технічної конференції. Том 1. — Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 1997. — С. 36—39
5. Харитонов В. Д. Двухстадийная сушка молочных продуктов. — М.: Агропромиздат, 1986. — 215 с.
6. Гринчишин Я. Т. Турбо-Паскаль: Чисельні методи в фізиці та математиці. — Тернопіль, 1993. — 130 с.
7. Брусиловский Л. П., Войнсберг А. Я. Автоматизация технологических процессов молочных консервов. — М.: Пищевая промышленность, 1975. — 279 с.

Рекомендована кафедрою електромеханічних систем автоматизації

Надійшла до редакції 3.03.05
Рекомендована до друку 5.04.05

Богачук Володимир Васильович — старший викладач кафедри електромеханічних систем автоматизації, **Головченко Олексій Михайлович** — доцент кафедри теплоенергетики, **Кухарчук Василь Васильович** — завідувач кафедри теоретичної електротехніки та промислової електроніки.

Вінницький національний технічний університет