УДК 681.3

В. А. Лужецький, д. т. н., проф.;
С. В. Лужецький, студ.

МОДЕЛІ ЦІЛИХ, РАЦІОНАЛЬНИХ І ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ, ЩО ВИКОРИСТОВУЮТЬСЯ В СУЧАСНИХ КОМП'ЮТЕРАХ

Проведено огляд моделей таких типів даних, як цілі, раціональні і дійсні числа, які використовуються в універсальних та спеціалізованих комп'ютерах. Описано систематичні позиційні представлення, базисами яких є послідовності не тільки цілих, але й ірраціональних чисел.

Вступ

Інформація, з якою мають справу обчислювальні пристрої та системи, зазвичай називається даними. Дані розбиваються на окремі складові, що називаються елементами даних. Причому елементи даних можуть бути різних типів. Тип даних залежить від значень, які ці дані можуть приймати [1].

Як відомо, моделлю в математиці прийнято називати множину об'єктів, для яких визначені ті чи інші предикати. Найпоширенішим типом предикату є відношення (відношення рівності (=), відношення нерівності ($\neq$), відношення порядку ($<$, $>$, $\leq, \geq$)). Ці відношення природно вводяться для елементів даних певного типу. Тим самим відповідний тип даних перетворюється в модель [1].

Склались певні принципи типізації даних, що використовуються в сучасних обчислювальних машинах. Перш за все, виділяють примітивні типи даних, до яких входять: цілі числа, дійсні числа, логічний (булевий) тип і літерний [1]. З використанням цих типів даних будуються усі інші (складні) типи даних, що виникають у практиці обробки інформації, зокрема, комплексні та гіперкомплексні числа, вектори, матриці, функції, багатовимірні масиви, структури даних та ін.

Мета статті — проаналізувати особливості використання наявних моделей цілих, раціональних і дійсних чисел в універсальних та спеціалізованих комп'ютерах.

Моделі складних типів даних є предметом розгляду наступної статті авторів.

Моделі цілих чисел

Узагальнена модель цілих чисел — це сукупність $\Psi_{\mathbf{Z}} = \langle \mathbf{Z};< \rangle$, основна множина $\mathbf{Z}$ якої складається з усіх натуральних чисел $\mathbf{N}$ (або $\mathbf{Z}_+$), усіх чисел, їм протилежних $(\mathbf{Z}_-)$ і числа нуль, тобто $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_+ \cup \{0\} \cup \mathbf{Z}_-$.

На практиці широко використовується така модель цілих чисел [2]:

$$\Psi''_{\mathbf{Z}} = \langle \mathbf{Z};\varphi_W \rangle,$$

де φ_W — унарне відношення «бути записаним систематичним зображенням у базисі **W**».

Серед систематичних представлень найбільше практичне застосування мають позиційні способи представлення. Для них характерні наочність представлення чисел і порівняльна простота виконання арифметичних операцій.

Позиційна система числення вважається заданою, якщо задано її базис і алфавіт [3], тобто позиційна система числення — це двійка (**W**, **A**), де **W** — послідовність цілих чисел (базис), а $\mathbf{A} \in \mathbf{Z}$ — скінченна множина цифр (алфавіт). Систематичним представленням або кодом числа $z \in \mathbf{Z}$ у (**W**, **A**) називається набір цифр $f = a_0 \dots a_k \in \mathbf{A}$ такий, що

$$z = \pi(f) = a_0 w_0 + \dots + a_k w_k.$$

Повнота системи числення для заданого алфавіту забезпечується тільки певними базисними послідовностями. Наприклад, у разі використання алфавіту $\mathbf{A} = \{0;1\}$, елементи базису мають задовольняти умову [4]

$$w_i \le 1 + \sum_{j=1}^{i-1} w_j .$$

Аналіз відомих систем числення показує, що елементи базисної послідовності задаються або переліком, або формулою $w_i = f(q, i)$, або формулою $w_i = f(w_{i-1}, w_{i-2}, \dots, w_{i-k}, i)$ і переліком початкових елементів.

До систем числення висуваються вимоги однозначності, скінченності й ефективності [5]. Якщо система числення задовольняє всі три вимоги, то її називають канонічною, а якщо не задовольняє тільки вимогу однозначності — надмірною.

У надмірній позиційній системі числення одне число має множину різних представлень, серед яких виділяють канонічне представлення [6], тобто представлення, мінімальне щодо лексикографічного порядку. Для переходу від одного представлення до іншого використовуються спеціальні операції, що називаються операціями інформаційного розвантаження [7], розкладання коефіцієнтів [8], згортки і розгортки [9].

У надмірній системі числення представлення числа містить більшу кількість цифр, ніж у канонічній системі. Однак, цей недолік компенсується тим, що або досягається підвищення швидкодії обчислювальних пристроїв [5, 9—11], або забезпечується підвищення надійності обробки інформації [12].

Найвідомішими і найдосліджуванішими є системи числення, елементи базису яких обчислюються за формулою $w_i = q^i$, де q — ціле додатне число, більше за одиницю, і $\mathbf{A} = \{0, 1, ..., q-1\}$. Такі системи числення називаються системами числення з природним порядком ваг розрядів [5].

Якщо ж елементи базису (ваги розрядів) обчислюються за формулою іншого виду, то вони утворюють системи числення зі штучним порядком ваг розрядів. Для цього випадку елементи базису $\mathbf{W}$ обчислюються на підставі рекурентних співвідношень порядку $n \ge 2$. Так у [13], виходячи з поліному

$$f(x) = -a_0 - a_1 x - \cdots - a_{n-1}x^{n-1} + x^n = (x - r_1) \cdots (x - r_n),$$

де a_j — ціле число; r_j — дійсне число; $|r_i| < 1$ для $i \ge 2$,

досліджується n-простір $C(f)$ усіх послідовностей $\mathbf{W} = \{w_0, w_1, \dots\}$, що задовольняють співвідношення $a_0 w_j + \cdots + a_0 w_{j+n-1} = w_{j+n}$, $j \ge 0$ для довільних $w_0, \dots, w_{n-1}$.

Окремим випадком таких послідовностей є послідовності, що обчислюються за формулою

$$w_{l+p+1} = w_{l+p} + w_l, \qquad l = 0, \pm 1, \pm 2 \dots; \qquad p = 1, 2, \dots \tag{1}$$

для початкових значень $w_0 = 0,\ w_1 = \cdots = w_p = 1$.

Елементи таких послідовностей прийнято позначати $\varphi_p(l)$ і називати p-числами Фібоначчі [9].

Елементи, що обчислюються на основі рекурентного співвідношення

$$\varphi_p(l + p + 1) = \varphi_p(l + p) + \varphi_p(l)$$

для $\varphi_p(0) = 0,\ \varphi_p(1) = \cdots = \varphi_p(p) = 1$ і $l = 0, 1, \dots$ утворюють послідовність $\boldsymbol{\varphi}_p^+$ цілих додатних чисел, а на основі співвідношення $\varphi_p(l) = \varphi_p(l + p + 1) - \varphi_p(l + p)$ для $l = -1, -2, \dots$ — послідовність $\boldsymbol{\varphi}_p^-$, що складається з цілих додатних і від’ємних чисел.

Об'єднанням послідовностей $\boldsymbol{\varphi}_p^+$ і $\boldsymbol{\varphi}_p^-$ утворюються розширені послідовності $\boldsymbol{\varphi}_p^*$ p-чисел Фібоначчі [14].

Базиси у вигляді послідовностей p-чисел Фібоначчі і алфавіт $\mathbf{A} = \{0; 1\}$ породжують «фібоначчієві» системи числення [9].

Базис для простору $C(f)$, який утворюється n геометричними послідовностями $\mathbf{R}_i = \{1, r_i, r_i^2, \dots\}$ дозволяє описати довільну інтегральну послідовність $\mathbf{W}$ формулою

$$\mathbf{W} = c_1\mathbf{R}_1 + \ldots + c_n\mathbf{R}_n ,$$

тобто $w_l = c_1 r_1^l + \ldots + c_n r_n^l , \quad l \geq 0$.

Окремим випадком таких послідовностей є послідовності степенів «золотої» *p*-пропорції α_p.

Між *p*-числами Фібоначчі і «золотою» *p*-пропорцією існує такий зв'язок:

$$\lim_{l \to \infty} \frac{\varphi_p(l)}{\varphi_p(l-1)} = \alpha_p .$$

Базиси $\boldsymbol{\varphi}_p$ і $\boldsymbol{\alpha}_p$ надмірні, тому існують множини представлень для кожного цілого числа.

У базисі $\boldsymbol{\varphi}_p$ будь-яке додатне ціле число представляється у вигляді [14]

$$N = \sum_{l=-m}^{n} a_l \varphi_p(l) , \tag{2}$$

де $a_l = \{0; 1\}$.

Набір $a_n\ a_{n-1} \cdots a_1 a_0\ a_{-1} \cdots a_{-m+1}\ a_{-m}$, що породжується представленням (2), називається *p-кодом Фібоначчі* числа *N*.

Цей набір називається *мінімальною формою* (М-*формою*) *p*-коду Фібоначчі, якщо $a_l = 1$ і $a_{l-k} = 0$ для $1 \leq k \leq p$.

Доведено [6, 9], що представлення (2), яке має М-форму *p*-коду Фібоначчі, є єдиним.

Представлення будь-якого додатного цілого числа в базисі $\boldsymbol{\alpha}_p$ має вигляд

$$N = \sum_{l=-m}^{n} a_l \alpha_p^l .$$

Набір $a_n\ a_{n-1} \cdots a_1 a_0\ a_{-1} \cdots a_{-m+1}\ a_{-m}$, що породжується даним представленням називається *кодом золотої p-пропорції додатного цілого числа*.

Оброблення даних, що представлені *p*-кодами Фібоначчі і кодами «золотої» *p*-пропорції, здійснюється спеціалізованими процесорами [14].

У роботі [3] вивчаються системи числення, у яких $\mathbf{A} = \{0;\ 1; \ldots;\ s\}$, а базис **W** породжується лінійним рекурентним співвідношенням другого порядку

$$w_{n+2} = a w_{n+1} + b w_n , \qquad w_0 = 1 , \qquad w_1 \geq 2 .$$

Однією з вимог, що висувається до систем числення, є можливість представлення додатних і від'ємних чисел. Однак не всі системи числення забезпечують таку можливість. Системи числення, що забезпечують представлення чисел тільки одного знака, називаються зміщеними, а які забезпечують представлення чисел різних знаків — незміщеними [5].

У зміщених системах числення і базис **W** і алфавіт **A** складаються з цілих чисел тільки одного знака. Тому для представлення цілих чисел різних знаків потрібен один додатковий розряд, який називається *знаковим розрядом.*

Можливість представлення чисел різних знаків забезпечується або базисом, що складається з чисел різних знаків [5], або алфавітом, що складається з чисел різних знаків [15], або тим і іншим.

Аналіз робіт, присвячених дослідженню різних позиційних систем числення, показує, що відсутня теорія, яка дозволяла б розглядати усі системи числення з єдиних позицій і дала би класифікацію систем числення, що охоплювала б усі відомі системи числення і передбачала б нові.

Моделі раціональних чисел

Розширенням алгебри цілих чисел є поле раціональних чисел $\tilde{Q} = \langle \mathbf{Q}; +, \cdot \rangle$. Його основна множина **Q** складається з усіх цілих і дробових чисел. Елементи цієї множини називаються раціональними числами [16]. Дробові числа або дроби мають таке зображення: $\dfrac{a}{b}$, де *a* — чисельник, *b* – знаменник.

Тут *a* — ціле число, а *b* — ціле додатне число.

Звідси випливає, що кожне раціональне число представляється сукупністю двох цілих чисел, а модель раціональних чисел має вигляд $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{Q}} = \langle \mathbf{Q}, \varphi_{\mathrm{Q}} \rangle$, де $\mathbf{Q} = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}_+$; φ_Q — унарне відношення «бути записаним дробом».

Якщо НСД (a; b) = 1, то маємо нескоротний дріб.

Поряд із формою запису дробу виду $\frac{a}{b}$ існує й інша форма, пов'язана з позиційним зображенням числа.

Вираз

$$a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \ldots + a_1 q + a_0 + a_{-1} q^{-1} + \ldots + a_{-m} q^{-m} + \ldots, \quad (3)$$

де $q \in \mathbf{N}$; $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0, a_{-1}, \ldots, a_{-m} \in \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots, q-1\}$ $n \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}$, називають q-ковим дробом [2].

Скорочений запис скінченного дробу має вигляд $a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 a_{-1} \ldots a_{-m}$, а нескінченного — $a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 a_{-1} \ldots a_{-m} \ldots$.

Модель раціональних чисел у вигляді q-кового дробу не є точною, тобто значення дробу $\frac{a}{b}$ відрізняється від значення q-кового дробу на похибку округлення. Ця похибка призводить до отримання неточних результатів виконання арифметичних операцій. Для усунення похибок представлення і похибок обробки раціональних чисел у [17] пропонується такий підхід.

Множина $\mathbf{F}_N$ раціональних чисел, що є дробами Фарея порядку N, відображається у множину цілих чисел $\mathbf{\Pi}_m^* = \{0,\ 1,\ 2, \ldots, m-1\}$, виконуються арифметичні операції у скінченному комутативному кільці $\left\langle \mathbf{\Pi}_m^*,\ +,\ \cdot \right\rangle$, де «+» і «•» означають додавання й множення за модулем m, а потім відображаються цілочисельні результати у відповідні раціональні числа.

В [17] описано алгоритми, які дозволяють здійснювати пряме $\mathbf{F}_N \to \mathbf{\Pi}_m^*$ та зворотне $\mathbf{\Pi}_m^* \to \mathbf{F}_N$ відображення. В основі цих алгоритмів лежить розширений алгоритм Евкліда для знаходження НСД, що вимагає значних витрат часу на їх реалізацію.

Ще однією з моделей раціональних чисел є коди Гензеля [18, 19]. Код Гензеля $H(p, r, \alpha)$ раціонального числа α є скінченний відрізок (кількість цифр у коді визначається числом r) його (нескінченного) p-адичного розкладання

$$\alpha = \sum_{j=n}^{\infty} a_j p^j,$$

де $a_j \in \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ і номер n обраний з умови $\|\alpha\|_p = p^{-n}$ (ряд сходиться до α у p-адичній метриці).

Якщо $\alpha = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} p^n$, де $(c, d) = (c, p) = (d, p) = 1$, то $H(p, r, c/d) = .a_0\ a_1 \ldots\ a_{r\text{-}1}$.

У цьому випадку $.\ a_{r\text{-}1} \ldots a_1\ a_0$ є p-ковим представленням цілого числа $\left|cd^{-1}\right|_m$, $m = p^r$. При цьому арифметичні операції над парами раціональних чисел зводяться до відповідних арифметичних операцій над їхніми кодами Гензеля. Існує певна відповідність між кодом Гензеля раціонального числа і представленням цілого числа в системі числення з основою p.

$$|cd^{-1}|_m = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_{r-1} p^{r-1}.$$

Практична реалізація таких систем числення вимагає використання p-значної логіки (p >2), що в даний час ускладнено. Тому обробка кодів Гензеля в даний час здійснюється тільки програмним шляхом із великими витратами часу.

Деякі представлення раціональних чисел з найкращим наближенням, так названі представлення «із фіксованим розрізом» і «із плаваючим розрізом», досліджувалися в роботах [20]. У цих статтях розглядається також питання про відновлення дробів за заданими наближеннями.

Моделі дійсних чисел

Розширенням системи раціональних чисел є система дійсних чисел $\tilde{R} = \left\langle \mathbf{R};\ +,\ \cdot\ ;<\right\rangle$. Елементи множини **R** називаються дійсними числами. До складу цієї множини входять усі раціональні та усі ірраціональні числа.

Відомо [21], що будь-яке дійсне число x може бути представлене у вигляді нескінченного ряду $x = [x] + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_i}{u_i}$, який називається розкладанням числа за базисною послідовністю $\{u_i\}$. Усі координати задовольняють умову $k_i \geq 0$, а $[x]$, за означенням, є найбільше з цілих чисел, які менші або дорівнюють x.

Однак неможливо говорити про представлення у комп'ютері неперервної множини дійсних чисел, оскільки дискретність представлення інформації та скінченна розрядність даних, що характерні для ЦОМ, породжують скінченну множину чисел. Тому, практично, є можливість представляти дійсні числа у вигляді тільки скінченного ряду

$$x = [x] + \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{u_i} . \qquad (4)$$

З цього випливає, що x є раціональне число виду a/λ^n, і для його представлення використовується (3). Така модель дійсного числа є неточною. Причому похибка представлення має дві складові: похибку представлення скінченним рядом (4) і похибку представлення скінченним q-ковим дробом (3).

Зменшення похибки представлення дійсних чисел у комп'ютері може бути досягнуто шляхом виконання такої послідовності відображень моделей [17].

1. Множина дійсних чисел відображається у скінченну множину раціональних чисел $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Q}$.

2. Множина раціональних чисел, які у загальному випадку є скоротними дробами, відображається у множину нескоротних дробів Фарея $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{F}_N$.

3. Множина дробів Фарея відображається у множину цілих чисел $\mathbf{F}_N \rightarrow \mathbf{\Pi}_m^*$.

4. Множина цілих чисел відображається у множину q-кових кодів $\mathbf{\Pi}_m^* \rightarrow \mathbf{K}$.

Велика кількість задач, розв'язуваних за допомогою комп'ютера, вимагає наявності широкого діапазону представлення дійсних чисел. Це забезпечується спеціальним представленням чисел, що називається представленням у формі з плаваючою комою [5]. Будь-яке дійсне число x представляється у вигляді $x = m_x s^{p_x}$, де m_x— мантиса числа, $m_x < 1$; s— основа системи числення; p_x — порядок числа.

Незважаючи на повсюдне застосування цієї форми представлення чисел у сучасних комп‘ютерах, продовжуються пошуки інших форм представлення, тому що їй притаманний ряд недоліків. Наприклад, у роботах [22, 23] запропоновані способи представлення чисел у формі, що аналогічна формі з плаваючою комою, які передбачають збільшення розрядності мантиси за рахунок розрядів порядку і навпаки, коли або мантиса, або порядок містять незначущі розряди. Однак недоліком таких форм представлення є складність розпізнавання мантиси і порядку, тому що вони мають змінну довжину.

Наведений огляд відомих моделей дійсних чисел показує, що всім їм властиві недоліки. Тому існує задача розробки моделі, яка забезпечувала б ефективне представлення дійсних чисел у широкому діапазоні.

Висновки

1. Аналіз описаних моделей цілих чисел показує, що вони зводяться до систематичних позиційних представлень, базис яких може складатися не тільки з цілих чисел, але й з ірраціональних чисел. Можливість представлення додатних і від'ємних цілих чисел забезпечується або додатковим знаковим розрядом, або базисом, що складається з додатних і від'ємних цілих чисел, або алфавітом, що складається з цілих чисел різних знаків.

2. Представлення раціональних чисел у комп'ютері сукупністю двох цілих чисел призводить до складних обчислень, тоді як представлення у вигляді p-адичного розкладання (кодів Гензеля) забезпечує таку саму складність операцій, як для цілих чисел. Однак в останньому випадку потрібні додаткові обчислення для введення і виведення даних.

3. Дискретність представлення інформації і скінченна розрядність даних, що характерні для цифрового комп'ютера, породжують скінченну множину чисел. Тому неможливо говорити про

представлення в комп'ютері неперервної множини дійсних чисел. Практично, є можливість представляти дійсні числа у вигляді тільки скінченного ряду. Для зменшення похибки представлення і вилучення похибок обчислень доцільно відображати множину таких дійсних чисел у множину цілих чисел.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Глушков В. М. Основы безбумажной информатики. — М.: Наука, 1982. — 552 с.

2. Уткіна С. В., Наришкіна Л. С. Алгебра і числові системи. — К.: Вища школа, 1995. — 304 с.

3. Frougny Christiana. Linear numeration systems of order two // Inf. and Comput. — 1988. — Vol. 77. — № 3. — P. 233—259.

4. Brown J. L., Jr. Note on Complete Sequences of Integers // Amer. Math. Monthly. — 1960. — Vol. 67. — P. 557—560.

5. Поспелов Д. А. Арифметические основы вычислительных машин дискретного действия: Учеб. пособ. для втузов. — М.: Высшая школа, 1970. — 308 с.

6. Hoggatt V. E. Generalized Zeckendorf Theoret // The Fibonacci Quarterly. — 1972. — Vol. 10. — P. 89—93.

7. Белявский В. Л., Иваськив Ю. Л., Харам В. С. Об одном подходе к организации вычислений в дискретных устройствах // Упр. системы и машины. — 1976. — № 4. — С. 90—95.

8. Carlitz L., Richard Scoville, Hoggat V. E. Fibonacci Representations of Higher Order-2 // The Fibonacci Quarterly. — 1972. — Vol. 10. — № 1. — P. 73—80.

9. Стахов А. П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. — М.: Сов. радио, 1977. — 288 с.

10.Каляев А. В. Многопроцессорные системы с программируемой архитектурой. — М.: Радио и связь, 1984. —240 с.

11. Щербина А. А. Об использовании избыточных систем счисления для ускорения решения системы линейных алгебраических уравнений // Электрон. моделирование. — 1981. — № 6. — С. 86—87.

12. Лужецкий В. А., Стахов А. П., Ваховский В. Г. Логико-достоверные компьютеры Фибоначчи // Помехоустойчивые коды (Компьютер Фибоначчи). — М. : Знание, 1989. — С. 11—39.

13. Zhizheng Zhang, Maixue Liu. Generalizations of Some Identities Involving Generalized Second-Order Integer Sequences // The Fibonacci Quarterly. — 1998. — Vol. 36. № 4. — P. 327—328.

14. Лужецький В. А. Високонадійні математичні Фібоначчі-процесори. — Вінниця: Універсум-Вінниця, 2000. — 248 с.

15. Avizienis A. Signed-Digit Number Representation for Fast Parallel Arithmetic // IRE Trans. on EC. — 1961. — EC 10. — P. 389—400.

16. Андронов И. К., Окунев А. К. Арифметика рациональных чисел. — М.: Просвещение, 1971. — 284 с.

17. Грегори Р., Кришнамурти Е. Безошибочные вычисления. Методы и приложения: Пер. с англ. — М.: Мир, 1988. — 208 с.

17. Krishnamurthy E. V., Rao T. M. and Subramanian K. Finite segment p-adic number systems with application to exact computation // Proc. Indian Acad. Sci. — 1975. — Vol.81A. — P. 58—79,

18. Gregory R. T. The use of finite-segment p-adic arithmetic for exact computation // BIT. — 1978. — Vol. 18. — P. 282—300.

19. Matula D. W. Fixed-slash and Floating slash Rational Arithmetic // Proc. 3th Symp. on Comput. Arith (IEEE). — 1975. — P. 90—91.

20. Бурбаки Н. Общая топология группы. Числа и связанные с ними группы и пространства: Пер. с фр. — М.: Наука, 1969. — 392 с.

21. Шауман А. М. Основы машинной арифметики Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1979. — 312 с.

22. Ходзуми Хамада. Уровень развития в области методов высокоточных вычислений: Пер. с японск. // Сэймицу Кикай. — 1985. — Т. 51. — № 1. — С. 122—125.

Рекомендована кафедрою захисту інформації

Надійшла до редакції 18.02.05.
Рекомендована до друку 26.04.05.

Лужецький Володимир Андрійович — завідувач кафедри захисту інформації, ***Лужецький Сергій Володимирович*** — студент Інституту інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії.

Вінницький національний технічний університет