

УЗАГАЛЬНЕННЯ РІВНЯНЬ ЛАГРАНЖА ТА ЛАГРАНЖА-МАКСВЕЛЛА ДЛЯ КОНСЕРВАТИВНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ З УРАХУВАННЯМ ДІЇ НАДІНЕРЦІЙНИХ ТА СУБПОТЕНЦІАЛЬНИХ СИЛ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

В роботі на основі поглиблення фундаментальних понять сили та енергії проведено узагальнення рівнянь Лагранжа та Лагранжа-Максвелла для консервативних динамічних систем механічного та електромагнітного походження: в математичному аспекті вперше отримано та представлено їх завершену форму та внутрішню структуру, у фізичному аспекті введено та частково розкрито поняття надінерційності та субпотенціальності. Отримані результати доповнюють вихідний базис теорії динамічних систем.

Ключові слова: узагальнені рівняння Лагранжа та Лагранжа-Максвелла, консервативні динамічні системи, теоретичні основи електротехніки, електрика та магнетизм, теоретична механіка, електромеханіка, електроенергетика, електричні кола, надінерційні та субпотенціальні сили і енергії, надінерційність та субпотенціальність

Abstract

In the article, based on the deepening of the fundamental concepts of force and energy, a generalization of the Lagrange and Lagrange-Maxwell equations for conservative dynamic systems of mechanical and electromagnetic origin is carried out: in the mathematical aspect, their complete form and structure are obtained and presented for the first time, in the physical aspect, the concepts of overinertiality and subpotentiality are introduced and disclosed. The obtained results complement the initial foundations of the theory of dynamical systems.

Keywords: generalization of Lagrange and Lagrange-Maxwell equations, conservative dynamical systems, theoretical foundations of electrical engineering, electromagnetism, analytical mechanics, electromechanics, electrical engineering, electrical circuits, overinertial and subpotential forces and energies, overinertiality and subpotentiality

В 1788 році видатним математиком і механіком Жозефом Луї Лагранжем в роботі «Аналітична механіка» [1] були наведені фундаментальні диференціальні рівняння класичної механіки, які описують рух механічної системи з довільним ступенем вільності через зміну її повної енергії, яку визначено відносно заданої системи узагальнених координат.

Для консервативних динамічних систем рівняння Лагранжа можуть бути записані у вигляді:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = 0, \quad (1)$$
$$s = 1, 2, \dots, n,$$

де q_s – s -та узагальнена координата, T та Π – відповідно кінетична та потенціальна енергії механічної системи, а n – число ступенів її вільності.

Близько ста років потому в 1873 році Джеймс Клерк Максвелл, відчувши спорідненість в динаміці зміни стану електромагнітної системи і виявивши глибинні математичні та фізичні аналогії між електромагнетизмом та механікою, в своїй праці «Трактат про електрику і магнетизм» [2] поряд з знаменитими рівняннями, що описують фундаментальні властивості електромагнітного поля (рівняннями Максвелла), отримав ще і диференціальні рівняння руху динамічних систем електромеханічної та електромагнітної природи, які за зовнішньою та внутрішньою структурами виявили себе як аналоги рівнянь Лагранжа.

Зокрема для електричних кіл (які за природою є теж динамічними системами, тільки електромагнітного походження) у разі попередньо накладеної умови відсутності в них дисипації електромагнітної енергії (автор нагадує, що ми розглядаємо суто консервативні системи), а також за відсутності дії зовнішніх узагальнених сил (наразі – джерел енергії) рівняння Лагранжа-Максвелла в

системі узагальнених координат типу «сила-напруга» (перша система електродинамічних аналогій) мають вигляд:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial W_m}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial W_e}{\partial q_s} = 0, \quad (2)$$

$$s = 1, 2, \dots, n,$$

де q_s – інтеграл за часом від контурного струму s -того незалежного контуру електричного кола (тобто контурний заряд як s -та узагальнена координата), W_m та W_e – енергії відповідно магнітного та електричного полів розглядуваного кола, а n – його число ступенів вільності.

Автор наявних тез вважає за потрібне зазначити, що і рівняння Лагранжа (1), і рівняння Лагранжа-Максвелла (2), по-перше, у відношенні консервативних систем виявляють дію *лише двох за природою типів сил* – сил *потенціального характеру* та *інерційних сил*, і, по-друге, встановлюють *фізичний паритет* поміж ними: жодна з таких сил не може бути представлена як вияв іншої. Водночас і в рівняннях Лагранжа, і в рівнянь Лагранжа-Максвелла ці узагальнені сили математично є складовими і визначаються в кожному випадку через *два* основних, але різних види енергії, що зрештою позначається і на зазначеній урізноманітненості самих сил.

Не втручаючись в заочну дискусію поміж Ісааком Ньютоном [3] та Жозефом Луї Лагранжем [1] щодо пріоритету між діючими силами та наявними енергіями, пов'язаними з ними, не можна не звернути увагу на ту обставину, що поява сил в консервативних системах виявляє себе, по-перше, виключно у разі зміни енергій, зазначених в рівняннях (1) та (2), а, по-друге, – у різний спосіб: у випадку потенціальних сил ($\frac{\partial \Pi}{\partial q_s}$ або $\frac{\partial W_e}{\partial q_s}$) – за зміни

узагальнених координат q_s , що зумовлює або не зумовлює (це залежить від властивостей (!) системи) зміну потенціальної енергії, наприклад, для лінійної механічної системи

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \sum_{p=1}^n (\pm) \beta_{sp} q_s q_p \quad (3)$$

або енергії електричного поля

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \sum_{p=1}^n (\pm) C_{sp}^{-1} q_s q_p \quad (4)$$

в лінійному електричному колі із зосередженими параметрами, а у випадку появи інерційних сил – за зміни узагальнених швидкостей (перших похідних узагальнених координат по часу) $\dot{q}_s$, що, знову ж таки, зумовлює, або не зумовлює (і це залежить також від властивостей (!) системи), зміну кінетичної енергії

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \sum_{p=1}^n (\pm) m_{sp} \dot{q}_s \dot{q}_p \quad (5)$$

механічної системи або енергії магнітного поля

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \sum_{p=1}^n (\pm) L_{sp} \dot{q}_s \dot{q}_p \quad (6)$$

електричного кола, де додатковим фактором є ще й супровідна швидкість вказаних змін у часі [4-7]. Якщо параметри, які характеризують зазначені властивості системи, наприклад, у співвідношеннях (3)-(6), дорівнюють нулю, відсутніми будуть відповідні їм і енергія, і сила.

Відтак, найважливішим із зазначеного, на думку автора, є здатність (властивість) динамічної системи реагувати відповідним чином на зміну хоча б однієї з *двох* взаємопов'язаних характеристик її стану, а саме *зміни положення* q_s та *зміни швидкості руху* $\dot{q}_s = \frac{dq_s}{dt}$, зазвичай перебуваючи в *протидії* таким змінам.

Наприклад, якщо незалежним динамічним елементарним ланкам в механічних системах *непритаманною* була б така властивість, яку в класичній механіці ми визначаємо як маса, відсутньою була б і кінетична енергія цих ланок, з яким би прискоренням (тобто зміною швидкості) ці ланки б не здійснювали свій рух. Як наслідок (або як причина), відсутніми були б і сили інерції. Система

виявила б свою безінерційність... Отже, і поняття інерції в такій системі залишалося б недослідженим і, імовірно, *незнаним*!

Інший приклад. За відсутності індуктивних елементів з індуктивностями L_{sp} схожа ситуація спостерігалася б і в електричних колах з топологічною структурою першої системи узагальнених електродинамічних координат [4, 8]. Під час руху в просторі станів таких динамічних систем внаслідок відсутності енергій магнітних полів та пов'язаних з ними напруг (сил інерції) щонайменше *незрозумілим* було б поняття інерційних процесів в електричному колі, позаяк все, що було б доступним для спостереження в таких системах, це – лише електричні поля ємнісних елементів, і, відповідно, їхні енергії та напруги (потенціальні узагальнені сили), що з цими енергіями пов'язані.

Відтак, беручи до уваги зазначене вище, автор тез набирається сміливості (аби це не називати іншим словом) стверджувати, що *математично і фізично рівняння Лагранжа та рівняння Лагранжа-Максвелла є незавершеними і за формою, і за структурою, і за змістом. Логічна сила зазначених рівнянь не є повною і потребує узагальнення.*

В математичному аспекті таке узагальнення можливе!

Зокрема для розглядуваних нами *консервативних* динамічних систем математичною формою узагальнених рівнянь Лагранжа та узагальнених рівнянь Лагранжа-Максвелла може і має бути система інтегро-диференціальних рівнянь виду:

$$\left(\dots + \frac{d^3}{dt^3} \frac{\partial W_3}{\partial q_s^{(3)}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial W_2}{\partial \ddot{q}_s} \right) + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} \right) + \left(\int \frac{\partial W_{-1}}{\partial (\int q_s dt)} dt + \int \left(\int \frac{\partial W_{-2}}{\partial (\int (\int q_s dt) dt)} dt \right) dt + \dots \right) = 0, \quad (7)$$

$$s=1,2,\dots,n,$$

яка у разі введення в неї операторів диференціювання $D^m = \frac{d^m}{dt^m}$, $m=0,1,\dots$ та інтегрування

$D^m = \int \dots \left(\int \dots dt \right) \dots dt$, $m=-1,-2,\dots$, у формальному відображенні стає більш компактною і може бути записана у вигляді:

$$\sum_{m=2}^{+\infty} D^m \frac{\partial W_m}{\partial D^m q_s} + \left(D^1 \frac{\partial T}{\partial D^1 q_s} + D^0 \frac{\partial \Pi}{\partial D^0 q_s} \right) + \sum_{m=-\infty}^{-1} D^m \frac{\partial W_m}{\partial D^m q_s} = 0, \quad (8)$$

$$s=1,2,\dots,n,$$

або

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} D^m \frac{\partial W_m}{\partial D^m q_s} = 0, \quad (9)$$

$$s=1,2,\dots,n.$$

У *фізичному аспекті* ситуація суттєвим чином складніша, оскільки для консервативних динамічних систем відомими є лише потенціальні та інерційні сили $\left(V^m = D^m \frac{\partial W_m}{\partial D^m q_s}, m=0,1 \right)$ і енергії $(W_m, m=0,1)$, що і відображено в *класичних* рівняннях Лагранжа (1) та Лагранжа-Максвелла (2). Інші ж за фізичною природою сили та енергії, які входять до складу *узагальнених* рівнянь Лагранжа та Лагранжа-Максвелла (7) - (9), природно допоки залишаються недослідженими.

А це можливі фізичні вияви, з одного боку, *надінерційних сил*

$$V^m = D^m \frac{\partial W_m}{\partial D^m q_s} = \frac{d^m}{dt^m} \frac{\partial W_m}{\partial q_s^{(m)}}, m=2,3,\dots, \quad (10)$$

$$s=1,2,\dots,n$$

та пов'язаних з ними *енергій* $W_m, m=2,3,\dots$, а з іншого – *субпотенціальних сил*

$$V^m = D^m \frac{\partial W_m}{\partial D^m q_s} = \int \left(\dots \int \frac{\partial W_m}{\partial \left(\int \dots \left(\int q_s dt \right) dt \right)} dt \right) dt, m = -1, -2, \dots, \quad (11)$$

$$s = 1, 2, \dots, n$$

і енергій W_m , $m = -1, -2, \dots$

Фізичний зміст складових в узагальнених рівняннях Лагранжа та Лагранжа-Максвелла (7) – (9) полягає в тому, що, як і у випадку з потенціальними і інерційними силами (та енергіями), надінерційні та субпотенціальні сили можуть з'являтися, а відповідні їм енергії змінюватися, повсякчас, коли зміни зазнаватимуть не тільки узагальнені координати чи їх перші похідні (узагальнені швидкості), але і, по-перше (у випадку надінерційних сил (10) та енергій), похідні від узагальнених координат за часом більш високих порядків (наприклад, зі зміною узагальненого прискорення), і, по-друге (у випадку субпотенціальних сил (11) і енергій), перший і вищі за порядком інтеграли від узагальненої координати за часом, якщо тільки динамічній системі будуть фізично притаманні такі властивості!

Тому, якщо такі надінерційні та субпотенціальні сили і енергії таки існують в природі, першочерговою задачею в різних областях науки (зокрема і в теоретичній механіці, і в теорії електромагнетизму) має постати саме виявлення і дослідження фізичних явищ та законів, які зрештою і розкриватимуть фізичний зміст *надінерційності* та *субпотенціальності* в загальній картині світу.

Узагальнення рівнянь Лагранжа та Лагранжа-Максвелла саме і слугує зазначеній меті.

Висновки

В роботі на основі поглиблення фундаментальних понять сили та енергії проведено узагальнення рівнянь Лагранжа та Лагранжа-Максвелла для консервативних динамічних систем механічного та електромагнітного походження: в математичному аспекті вперше отримано та представлено їх завершену форму та внутрішню структуру, у фізичному аспекті введено та частково розкрито поняття надінерційності та субпотенціальності. Отримані результати доповнюють вихідний базис теорії динамічних систем.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Lagrange J.-L. *Mechanique analytique*. – Paris: Veuve Desaint, 1788. – 512 p.
2. Maxwell J. Cl. *A Treatise on Electricity and Magnetism*: 2 vol. – Oxford: Clarendon Press, 1873. – 1vol. – 427 p.; 2vol. – 451 p.
3. Newton I. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. – Londini: Jussu Regiae ac Typis Josephi Streater, 1687. – 511 p.
4. Ведміцький Ю. Г. Контроль моменту інерції електротехнічних комплексів та систем на основі удосконаленої теорії електродинамічних аналогій : дис. ... канд. техн. наук : спец. 05.09.03 – Електротехнічні комплекси та системи. Вінниця, 2013. 257 с.
5. Теоретичні основи електротехніки. Електромагнітне поле: підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2014. – 392 с.
6. Теоретичні основи електротехніки. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола: підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, за ред. проф. Ю. О. Карпова. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2019. – 456 с.
7. Теоретичні основи електротехніки. Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими та розподіленими параметрами : підручник / Ю. О. Карпов, С. Ш. Кацев, Ю. Г. Ведміцький ; під ред. проф. Ю. О. Карпова – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 377 с.
8. Ведміцький Ю. Г. Тектологія динамічних систем і явище гіперсилової взаємодії в структурних рівняннях узагальненого електричного кола / Ю. Г. Ведміцький // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. – 2018. – №2. – С. 1-11.

Юрій Григорович Ведміцький, Вінниця, 17 березня 2026 року

Юрій Григорович Ведміцький — канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри комп'ютеризованих електромеханічних систем і комплексів, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, wjg4224@gmail.com

Yurii G. Vedmitskyi — Cand. Sc. (Eng.), Assistant Professor of Department of Computerized Electromechanical Systems and Complexes, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, wjg4224@gmail.com

Юрій Григорович Ведміцький, Вінниця, 17 березня 2026 року