

ІНТЕРАКТИВНІСТЬ ДИСИПАТИВНИХ СИЛ В ФУНКЦІЯХ РОЗСПЮВАННЯ РЕЛЕЯ ТА УЗАГАЛЬНЕНІ РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА І ЛАГРАНЖА-МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ДИСИПАТИВНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ З ДОВІЛЬНИМ СТУПЕНЕМ ВІЛЬНОСТІ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

В роботі на основі поглиблення фундаментальних понять сили та енергії проведено узагальнення рівнянь Лагранжа та Лагранжа-Максвелла для дисипативних динамічних систем механічного та електромагнітного походження: в математичному аспекті вперше отримано та представлено їх завершену форму та внутрішню структуру, а у фізичному введено та частково розкрито поняття надінерційності, субпотенціальності, інтерактивної дисипації енергії. Отримані результати доповнюють вихідний базис теорії динамічних систем.

Ключові слова: узагальнені рівняння Лагранжа та Лагранжа-Максвелла, дисипативні динамічні системи, теоретичні основи електротехніки, електрика та магнетизм, теоретична механіка, електромеханіка, електроенергетика, електричні кола, надінерційні та субпотенціальні сили і енергії, інтерактивні дисипативні сили та функції Релея

Abstract

In the article, based on the deepening of the fundamental concepts of force and energy, a generalization of the Lagrange and Lagrange-Maxwell equations for dissipative dynamic systems of mechanical and electromagnetic origin is carried out: in the mathematical aspect, their complete form and internal structure are obtained and presented for the first time, and in the physical aspect, the concepts of overinertia, subpotentiality, and interactive energy dissipation are introduced and partially disclosed. The obtained results complement the initial basis of the theory of dynamical systems.

Keywords: generalized Lagrange and Lagrange-Maxwell equations, dissipative dynamical systems, theoretical foundations of electrical engineering, electricity and magnetism, theoretical mechanics, electromechanics, electric power engineering, electrical circuits, overinertial and subpotential forces and energies, interactive dissipative forces and Rayleigh functions

Розглянемо дисипативні динамічні системи з довільним числом ступенів вільності і зосередимо нашу увагу на таких фундаментальних якостях як зворотність та незворотність енергетичних взаємоперетворень, що в таких системах спостерігаються під час їх руху (зміни стану) за умови дії зовнішніх узагальнених сил.

Для прикладу розглянемо рух динамічних систем механічної та електромагнітної природи. В обидвох випадках – систем із зосередженими параметрами.

Відомо, що рух механічних систем з довільним ступенем вільності n може бути описаний рівняннями Лагранжа [1, 2]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = Q_s, \quad (1)$$
$$s = 1, 2, \dots, n,$$

а рух динамічних систем електромагнітного походження, зокрема, електричних кіл довільного $(2n)$ порядку – рівняннями Лагранжа-Максвелла [3]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial W_m}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial W_e}{\partial q_s} = e_s, \quad (2)$$
$$s = 1, 2, \dots, n.$$

В наведених системах поряд з узагальненими *потенціальними* $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_s} \text{ або } \frac{\partial W_e}{\partial q_s} \right)$ та *інерційними* $\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \text{ або } \frac{d}{dt} \frac{\partial W_m}{\partial \dot{q}_s} \right)$ силами водночас присутні і сили *дисипативної* природи $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_s} \right)$.

Як видно з рівнянь Лагранжа та Лагранжа-Максвелла ці сили визначено через однойменну *дисипативну функцію* (або інакше – *функцію розсіювання*) Релея [2].

За фізичним змістом інтеграл від дисипативної функції Релея за часом визначає половину розсіюваної в динамічній системі енергії, звідки сама дисипативна функція Релея, як похідна, виявляє себе уполовиненою потужністю розсіюваної енергії.

Для лінійних або лінеаризованих *механічних* систем з довільним числом ступенів вільності n дисипативна функція Релея може бути записана як

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \sum_{p=1}^n (\pm) \alpha_{sp} \dot{q}_s \dot{q}_p, \quad (3)$$

а для *електричних кіл* довільного $(2n)$ порядку –

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \sum_{p=1}^n (\pm) R_{sp} \dot{q}_s \dot{q}_p \quad (4)$$

відповідно [4-8].

Співвідношення (3) та (4) глибше розкривають механізм дисипації повної енергії в системі під час її руху. Із співвідношень безпосередньо випливає, що дисипація енергії спостерігається в тих динамічних системах, які через характерні фізичні явища виявляють, як властивість, свою здатність чинити активну силову протидію будь-якій зміні узагальненої координати в залежності від швидкості такої зміни (узагальненої швидкості), але незалежно від швидкості зміни самої зазначеної швидкості (узагальненого прискорення).

Останнє означає, що при визначенні функції Релея *враховуванням* є обмежене коло дисипативних фізичних явищ та процесів. Наприклад, з-поміж відомих можна виокремити урізноманітнені вияви тертя в механічних системах, або електричний опір резистивних елементів в електричних колах.

А тепер уявімо, що динамічній системі були б непритаманними або невідомими *всі* (!) фізичні явища дисипативного характеру, навіть ті, які вище зазначені і визначені узагальненою швидкістю. Тоді невраховуванням і, імовірно, невідомим було б і саме явище дисипації енергії в динамічній системі.

Класичні рівняння Лагранжа (1) та Лагранжа-Максвелла (2) саме це і доводять. Але вони ж наштотвхують і на думку: а чи достатньо на сьогодні нам відомо про той складний перебіг вияву фізичних явищ, яким притаманна дисипація енергії? Відповідь однозначна. Ні! Природно, що не все...

І якщо так, то логічно постає наступне запитання. Ключове. *А чи всі за структурою дисипативні сили враховано в самих класичних рівняннях Лагранжа та Лагранжа-Максвелла?*

Автор наявних тез не наважується категорично сказати: «Ні».

Але не може сказати і: «Так», оскільки цілком допускає, що в дисипативних динамічних системах різної фізичної природи (і в, зокрема, зазначених) можуть спостерігатися ще недосліджені або невідомі фізичні явища, де активний супротив динамічній системі виявлятиме себе не тільки зміні узагальненої координати (за наявної її швидкості), але і самій зміні *цієї швидкості* (за наявного узагальненого прискорення), а також зміні їх *похідних* (за часом) *більш високого порядку*. Можливо, і зміні *інтегралів від узагальненої координати*. Дисипативні сили, які за опору зміні таких параметрів руху системи з'являтимуться, природно, водночас за структурою носитимуть складний внутрішньо активний (тобто *інтерактивний*) характер.

Усе вище зазначене означає, що *класичними рівняннями Лагранжа та Лагранжа-Максвелла дисипативні сили більш високого порядку ні за формою, ні за структурою, ні за змістом і не враховані, і не описані*.

Однак автор цілком усвідомлює, що у *фізичному аспекті* без доказового (теоретичного чи експериментального) підтвердження існування або хоча б можливості існування зазначених фізичних явищ стверджувати *про обмежену узагальненість і незавершеність рівнянь Лагранжа та рівнянь Лагранжа-Максвелла* немає ні підстав, ні сенсу. Але...

Але в *математичному аспекті* не можна не бачити, що логічна сила класичних рівнянь Лагранжа та рівнянь Лагранжа-Максвелла не є повною і потребує узагальнення!

І якщо за основу узяти *поглиблення фундаментальних понять сили та енергії* (включно з її дисипацією), то таке узагальнення стає і можливим, і допустимим.

Зокрема, для розглядуваних нами *дисипативних* динамічних систем математичною формою узагальнених рівнянь Лагранжа та узагальнених рівнянь Лагранжа-Максвелла може і має бути система інтегро-диференціальних рівнянь виду:

$$\begin{aligned} & \left(\dots + \frac{d^3}{dt^3} \frac{\partial W_3}{\partial q_s^{(3)}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial q_s^{(3)}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial W_2}{\partial \ddot{q}_s} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \ddot{q}_s} \right) + \\ & + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} \right) + \\ & + \left(\int \frac{\partial \Phi_{-1}}{\partial q_s} dt + \int \frac{\partial W_{-1}}{\partial (\int q_s dt)} dt + \int \left(\int \frac{\partial \Phi_{-2}}{\partial (\int q_s dt)} dt \right) dt + \int \left(\int \frac{\partial W_{-2}}{\partial (\int (\int q_s dt) dt)} dt \right) dt + \dots \right) = \Theta_s, \\ & s = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (5)$$

яка у разі введення в неї операторів диференціювання $D^m = \frac{d^m}{dt^m}$, $m = 0, 1, \dots$ та інтегрування

$D^m = \int \dots \left(\int \dots dt \right) \dots dt$, $m = -1, -2, \dots$, у формальному відображенні стає більш компактною і може бути записана у вигляді:

$$\begin{aligned} & \left(\dots + D^3 \frac{\partial W_3}{\partial D^3 q_s} + D^2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial D^3 q_s} + D^2 \frac{\partial W_2}{\partial D^2 q_s} + D^1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial D^2 q_s} \right) + \\ & + \left(D^1 \frac{\partial T}{\partial D^1 q_s} + D^0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial D^1 q_s} + D^0 \frac{\partial \Pi}{\partial D^0 q_s} \right) + \\ & + \left(D^{-1} \frac{\partial \Phi_{-1}}{\partial D^0 q_s} + D^{-1} \frac{\partial W_{-1}}{\partial D^{-1} q_s} + D^{-2} \frac{\partial \Phi_{-2}}{\partial D^{-1} q_s} + D^{-2} \frac{\partial W_{-2}}{\partial D^{-2} q_s} + \dots \right) = \Theta_s, \\ & s = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (6)$$

або

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-\infty}^{+\infty} D^m \left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial D^{m+1} q_s} + \frac{\partial W_m}{\partial D^m q_s} \right) = \Theta_s, \\ & s = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (7)$$

Диференціальні рівняння (5) - (7) по відношенню до класичних рівнянь Лагранжа (1) та Лагранжа-Максвелла (2) є їх узагальненою формою. Тому і розв'язки *фундаментальної задачі Коші* безсумнівно матимуть більш глибокі і, можливо, ще невідомі *математичні* змісти. Хоча б тому, що до складу узагальнених рівнянь Лагранжа та Лагранжа-Максвелла (5) – (7) входять не тільки відомі

потенціальні $\left(V^m = D^m \frac{\partial W_m}{\partial D^m q_s}, m = 0 \right)$, інерційні $\left(V^m = D^m \frac{\partial W_m}{\partial D^m q_s}, m = 1 \right)$ і дисипативні $\left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial D^{m+1} q_s}, m = 0 \right)$ сили, енергії $(W_m, m = 0, 1)$ та функція Релея $(\Phi_m, m = 0)$, які визначено

класичними рівняннями, але і допоки невідомі *надінерційні* сили

$$\begin{aligned} & V^m = D^m \frac{\partial W_m}{\partial D^m q_s} = \frac{d^m}{dt^m} \frac{\partial W_m}{\partial q_s^{(m)}}, m = 2, 3, \dots, \\ & s = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (8)$$

та пов'язані з ними енергії ($W_m, m = 2, 3, \dots$), субпотенціальні сили

$$V^m = D^m \frac{\partial W_m}{\partial D^m q_s} = \int \left(\dots \int \frac{\partial W_m}{\partial \left(\int \dots \left(\int q_s dt \right) dt \right)} dt \right) dt, m = -1, -2, \dots, \quad (9)$$

$$s = 1, 2, \dots, n$$

і енергії ($W_m, m = -1, -2, \dots$), а також надінерційні ($\Phi_m, m = 1, 2, \dots$) та субпотенціальні ($\Phi_m, m = -1, -2, \dots$) дисипативні функції Релея та інтерактивні дисипативні сили, що через функції Релея визначаються:

$$V^m = D^m \frac{\partial \Phi_m}{\partial D^{m+1} q_s} = \frac{d^m}{dt^m} \frac{\partial \Phi_m}{\partial q_s^{(m+1)}}, m = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

$$s = 1, 2, \dots, n$$

та

$$V^m = D^m \frac{\partial \Phi_m}{\partial D^{m+1} q_s} = \int \left(\dots \int \frac{\partial \Phi_m}{\partial \left(\int \dots \left(\int q_s dt \right) dt \right)} dt \right) dt, m = -1, -2, \dots, \quad (11)$$

$$s = 1, 2, \dots, n$$

відповідно, які класичними рівняннями Лагранжа та Лагранжа-Максвелла невизначені.

Висновки

В роботі на основі поглиблення фундаментальних понять сили та енергії проведено узагальнення рівнянь Лагранжа та Лагранжа-Максвелла для дисипативних динамічних систем механічного та електромагнітного походження: в математичному аспекті вперше отримано та представлено їх завершену форму та внутрішню структуру, а у фізичному введено та частково розкрито поняття надінерційності, субпотенціальності, інтерактивної дисипації енергії. Отримані результати доповнюють вихідний базис теорії динамічних систем.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Lagrange J.-L. *Mechanique analytique*. – Paris: Veuve Desaint, 1788. – 512 p.
2. Strutt J. W. (Lord Rayleigh) *The Theory of Sound*. – London: Macmillan and Co., 1877. – 326 p.
3. Maxwell J. Cl. *A Treatise on Electricity and Magnetism*: 2 vol. – Oxford: Clarendon Press, 1873. – 1vol. – 427 p.; 2vol. – 451 p.
4. Ведміцький Ю. Г. Контроль моменту інерції електротехнічних комплексів та систем на основі удосконаленої теорії електродинамічних аналогій : дис. ... канд. техн. наук : спец. 05.09.03 – Електротехнічні комплекси та системи. Вінниця, 2013. 257 с.
5. Теоретичні основи електротехніки. Електромагнітне поле: підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2014. – 392 с.
6. Теоретичні основи електротехніки. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола: підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, за ред. проф. Ю. О. Карпова. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2019. – 456 с.
7. Теоретичні основи електротехніки. Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими та розподіленими параметрами : підручник / Ю. О. Карпов, С. Ш. Кацив, Ю. Г. Ведміцький ; під ред. проф. Ю. О. Карпова – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 377 с.
8. Ведміцький Ю. Г. Тектологія динамічних систем і явище гіперсилової взаємодії в структурних рівняннях узагальненого електричного кола / Ю. Г. Ведміцький // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. – 2018. – №2. – С. 1-11.

Юрій Григорович Ведміцький, Вінниця, 17 березня 2026 року

Юрій Григорович Ведміцький — канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри комп'ютеризованих електромеханічних систем і комплексів, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, wjg4224@gmail.com

Yurii G. Vedmitskyi — Cand. Sc. (Eng.), Assistant Professor of Department of Computerized Electromechanical Systems and Complexes, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, wjg4224@gmail.com

Юрій Григорович Ведміцький, Вінниця, 17 березня 2026 року