

*Ю.Г. Ведміцький, к.т.н., доцент, М.В. Климишен,
А.В. Комар, І.О. Іващенко, О.О. Маліновський
(Вінницький національний технічний університет, Україна)*

Побудова хвильового рівняння двопровідної довгої лінії в канонічній формі

В роботі проведено математичну ідентифікацію фізичних процесів, що спостерігаються в двопровідній довгій лінії. На основі рівнянь Хевісайда (телеграфних рівнянь) отримано одновимірне хвильове рівняння в канонічній формі. Результати роботи доповнюють вихідний базис теорії довгої лінії.

Наявна робота уточнює окремі положення *теорії довгої лінії*, яка є важливою складовою теоретичних основ електротехніки. Необхідність таких уточнень обумовлена багатьма чинниками. Найістотнішими з них для авторів стала потреба в пошуку довершеної форми математичного узагальнення щодо опису фізичних процесів, які спостерігаються або можуть спостерігатися в *двопровідній довгій лінії* – одновимірній електромагнітній системі з розподіленими параметрами – під час транспортування нею електричної енергії або передачі по ній інформації у формі електричних сигналів. Зазначене і є *метою* цієї роботи.

Отже, розглянемо двопровідну довгу лінію як однорідну стаціонарну динамічну електричну систему з розподіленими параметрами – лінійну, однак непараметричну. Як відомо [1-6], фізичні процеси в такому електричному колі описуються надзвичайно красивою і симетричною системою лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних *О. Хевісайда*, названих в теоретичній електротехніці “*телеграфними рівняннями*”:

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}, \end{cases} \quad (1)$$

де R_0 , L_0 , G_0 , C_0 – первинні параметри довгої лінії, які характеризують її електромагнітні властивості. За умовою однорідності і стаціонарності системи ці параметри не є функціями ані одновимірної просторової координати x , ані часу t .

Самі ж рівняння, що входять до системи (1), складено відносно миттєвих напруги і струму. Останні є функціями водночас двох незалежних змінних –

$$u = u(x, t), \quad i = i(x, t).$$

В обидвох рівняннях системи (1), продиференціювавши їх ліві та праві частини, проведемо окремі математичні перетворення.

Зазначимо, що операцію диференціювання відносно першого рівняння здійснимо по незалежній змінній x . Ліву і праву частини другого ж рівняння системи (1) продиференціюємо по іншій незалежній змінній – часові t .

Внаслідок таких дій отримуємо систему

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = R_0 \frac{\partial i}{\partial x} + L_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}; \\ -\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = G_0 \frac{\partial u}{\partial t} + C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \end{cases} \quad (2)$$

Скористаємося другим рівнянням вихідної системи (1) зі значенням першої частинної похідної $\frac{\partial i}{\partial x}$ та другим рівнянням системи (2) з другою

змішаною частинною похідною $\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}$, підставимо їх в перше рівняння системи (2).

В результаті математичних перетворень отримуємо диференціальне рівняння в частинних похідних, яке сформовано відносно миттєвої напруги:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - L_0 C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (G_0 L_0 + R_0 C_0) \frac{\partial u}{\partial t} - R_0 G_0 u = 0. \quad (3)$$

Внаслідок притаманної системі (1) математичної *симетрії* диференціальне рівняння, складене відносно миттєвого струму $i = i(x, t)$, матиме подібну ж до рівняння (3) структуру:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - L_0 C_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - (G_0 L_0 + R_0 C_0) \frac{\partial i}{\partial t} - R_0 G_0 i = 0, \quad (4)$$

в чому неважко переконатися, якщо провести схожі математичні перетворення в системі (1), але вже по відношенню до миттєвого струму.

Отримані рівняння (3) та (4) є одновимірними лінійними диференціальними рівняннями в частинних похідних 2-го порядку з двома незалежними змінними і належать до класу *рівнянь математичної фізики*.

Запишемо їх структуру узагальнено в канонічній формі. Наприклад, в термінах миттєвої напруги таке диференціальне рівняння матиме вигляд

$$A(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0, \quad (5)$$

де за математичною ідентифікацією співвідношень (3) та (4) коефіцієнти $A(x, t)$, $B(x, t)$ та $C(x, t)$ не залежать ні від просторової координати x (однорідність), ні від часу t (стаціонарність), позаяк досліджувана нами довга лінія за умовою задачі якраз і є саме такою: і однорідною динамічною системою, і стаціонарною.

Отже, як впливає із рівнянь (3-5), для довгої лінії значення коефіцієнтів $A=1$, $B=0$, а

$$C = -L_0 C_0. \quad (6)$$

Що ж до функції $F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}\right)$, то

$$F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = -(G_0 L_0 + R_0 C_0) \frac{\partial u}{\partial t} - R_0 G_0 u.$$

Отримані диференціальні рівняння в частинних похідних (3) і (4) називаються *одновимірними хвильовими рівняннями* довгої лінії і, оскільки їх параметр відповідно до (6)

$$D = B^2 - AC = L_0 C_0 > 0,$$

такі рівняння належать до класу диференціальних рівнянь *гіперболічного типу*.

Нагадаємо, що гіперболічні диференціальні рівняння описують в динамічній системі з розподіленими параметрами *коливальні (хвильові) фізичні процеси*, в нашому випадку – *електромагнітної природи*.

Висновок

В роботі проведено математичну ідентифікацію фізичних процесів, які спостерігаються в одновимірній однорідній стаціонарній динамічній системі з розподіленими параметрами на прикладі двопровідної довгої лінії, для якої на основі рівнянь Хевісайда (телеграфних рівнянь) отримано одновимірні хвильові рівняння відносно миттєвих напруги та струму. Результати дослідження доповнюють вихідний теоретичний базис довгої лінії

Список літератури

1. Теоретичні основи електротехніки: підручник / В. С. Бойко, В. В. Бойко. – К.: ІВЦ “Політехніка”, 2004. – 272 с.
2. Математичні методи ідентифікації динамічних систем / Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, О. Б. Мокін. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 263 с.
3. Теоретичні основи електротехніки. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола: підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук, С. Ш. Кацев, за ред. проф. Ю. О. Карпова. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2019. – 456 с.
4. Теорія автоматичного керування : підручник / М. Г. Попович, О. В. Ковальчук. – К. : Либідь, 2007. – 657 с.
5. Теоретичні основи електротехніки. Електромагнітне поле : підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2014. – 392 с.
6. Теоретичні основи електротехніки. Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими та розподіленими параметрами : підручник / Ю. О. Карпов, С. Ш. Кацев, В. В. Кухарчук, Ю. Г. Ведміцький ; під ред. проф. Ю. О. Карпова – Вінниця : ВНТУ, 2019. – 377 с.