

**ОПЕРАТОРНЕ ЗОБРАЖЕННЯ МЕТОДИЧНОЇ ПОХИБКИ
В РОЗВ'ЯЗКУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ
ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА ЗА НЕНУЛЬОВИХ ПОЧАТКОВИХ УМОВ**

Ведміцький Ю. Г., к.т.н., доцент,
доцент кафедри комп'ютеризованих електромеханічних систем і комплексів,
Вінницький національний технічний університет
e-mail: wjg4224@gmail.com

Хибна практика, з якою, на превеликий жаль, раз у раз доводиться стикатися в науковій та науково-технічній літературі, а також в техногенному довкіллі, що зумовлена неналежними діями під час розв'язування задачі Коші за допомогою *операторного методу* розрахунку динамічних режимів, наприклад, перехідних процесів в стаціонарних лінійних електричних колах, породжує невідворотне бажання вкотре зацентувати увагу на питаннях умов застосовуваності зазначеного методу і змушує провести математичну ідентифікацію методичної похибки, яка з'являється в розв'язку диференціального рівняння динамічної системи у разі примусового обнулення ненульових за умовою задачі Коші початкових умов. Оскільки теоретична електротехніка є точною наукою і оперує не тільки поняттями, що наділені якісним змістом, але і його кількісними характеристиками [1-4], то зазначене, природно, їй і підпорядковує мету цієї авторської роботи.

Задачу розв'яжемо в операторній формі відносно дробово-раціональної функції зображення методичної похибки, а також узагальнено та інваріантно до топологічної структури електричного кола.

Отже, розглянемо довільне лінійне електричне коло з одним джерелом електричної енергії (е.р.с. або струму), де зазначене джерело і слугуватиме генератором динамічного збурення системи зовнішньою дією $x(t)$. Реакцією на таку дію слугуватиме функція $y(t)$: або миттєвого струму i в будь-якій вітці зазначеного кола, або миттєвої напруги u на будь-якій його ділянці.

Математичний зв'язок поміж дією та реакцією на неї встановлює оператор, який належить до класу лінійних звичайних диференціальних рівнянь:

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y}{dt^k} = \sum_{s=0}^m b_s \frac{d^s x}{dt^s}, \quad (1)$$

де диференціальні рівняння складено на підставі, по-перше, фізичних законів, яким підпорядковані силові та енергетичні процеси, що спостерігаються в технічній системі, і, по-друге, математичних співвідношень, які виявляють основні властивості окремо узятих складових елементів системи. У разі електричного кола із зосередженими параметрами такими фізичними законами є закони Кірхгофа, а математичними виразами – співвідношення, які в теоретичній електротехніці отримали назву “компонентних співвідношень” [1-3].

Оскільки розв'язок заявленої задачі має бути представлений в операторній формі, скористаємося інтегральним перетворенням Лапласа і перейдемо до зображень оригіналів функцій вхідної дії $x(t)$ та реакції електричного кола $y(t)$ на неї:

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt = L\{x(t)\},$$

$$Y(p) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt = L\{y(t)\}.$$

З урахуванням властивості лінійності перетворення Лапласа, відповідно до диференціального рівняння (1) отримуємо лінійне алгебраїчне рівняння, складене відносно зображень зазначених оригіналів та їх похідних:

$$\sum_{k=0}^n a_k L\left\{\frac{d^k y}{dt^k}\right\} = \sum_{s=0}^m b_s L\left\{\frac{d^s x}{dt^s}\right\}.$$

Скориставшись теоремою про диференціювання оригіналу, для зображень похідних отримуємо

$$\begin{aligned} L\left\{\frac{d^k y}{dt^k}\right\} &= p^k Y(p) - \left[p^{k-1} y(0_+) + p^{k-2} y'(0_+) + \dots + p y^{(k-2)}(0_+) + y^{(k-1)}(0_+) \right] = \\ &= p^k Y(p) - \sum_{v=0}^{k-1} p^v y^{(k-v-1)}(0_+), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L\left\{\frac{d^s x}{dt^s}\right\} &= p^s X(p) - \left[p^{s-1} x(0_+) + p^{s-2} x'(0_+) + \dots + p x^{(s-2)}(0_+) + x^{(s-1)}(0_+) \right] = \\ &= p^s X(p) - \sum_{\tau=0}^{s-1} p^{\tau} x^{(k-\tau-1)}(0_+). \end{aligned}$$

Тоді математичний оператор, що встановлює зв'язок поміж функціями зображень вхідної дії $X(p)$ та реакції на неї $Y(p)$, з урахуванням *ненульових початкових умов* набуває вигляду:

$$\sum_{k=0}^n a_k \left[p^k Y(p) - \sum_{v=0}^{k-1} p^v y^{(k-v-1)}(0_+) \right] = \sum_{s=0}^m b_s \left[p^s X(p) - \sum_{\tau=0}^{s-1} p^{\tau} x^{(k-\tau-1)}(0_+) \right],$$

або

$$Y(p) = X(p) \frac{\sum_{s=0}^m b_s p^s}{\sum_{k=0}^n a_k p^k} + \frac{\sum_{k=0}^n \sum_{v=0}^{k-1} a_k y^{(k-v-1)}(0_+) p^v - \sum_{s=0}^m \sum_{\tau=0}^{s-1} b_s x^{(k-\tau-1)}(0_+) p^{\tau}}{\sum_{k=0}^n a_k p^k}. \quad (2)$$

Як відомо, визначення *передатної функції* динамічної системи здійснюють за *нульових початкових умов*, позаяк саме за такого підходу передаточна функція зберігає інваріантність до функції вхідної дії [4]. Тому

ігнорування ненульових початкових умов, їх примусове знулення призводить до виродження рівняння (2) в співвідношення:

$$Y^*(p) = X(p) \frac{\sum_{s=0}^m b_s p^s}{\sum_{k=0}^n a_k p^k}, \quad (3)$$

що безпосередньо позначається і на самій передатній функції системи, для якої у разі визначення за виразом (3) її спотворений характер поширюватиметься на результати подальшого аналізу системи в цілому.

Водночас рівняння (2) та (3) дозволяють математично ідентифікувати і визначити дробово-раціональну функцію операторного зображення заявленої методичної похибки:

$$\Delta Y(p) = Y(p) - Y^*(p) = \frac{\sum_{k=0}^n \sum_{v=0}^{k-1} a_k y^{(k-v-1)}(0_+) p^v}{\sum_{k=0}^n a_k p^k} - \frac{\sum_{s=0}^m \sum_{\tau=0}^{s-1} b_s x^{(k-\tau-1)}(0_+) p^\tau}{\sum_{k=0}^n a_k p^k},$$

яка за структурою виявляє себе як функція, що складається з двох змістових складових, кожна з яких визначається початковими умовами (включно з похідними), накладеними водночас і на вхідну дію, і на реакцію стаціонарного електричного кола.

Отже, в роботі проведено математичну ідентифікацію фізичних процесів, що спостерігаються під час еволюції стаціонарного електричного кола в фундаментальній задачі Коші за нульових та ненульових початкових умов і отримано дробово-раціональну функцію операторного зображення методичної похибки, яка з'являється в розв'язку диференціального рівняння у разі примусового знулення ненульових за умовою задачі початкових умов. Отримані результати створюють математичне підґрунтя для корегування відомих методів аналізу перехідних процесів як в стаціонарних електричних колах, так і в динамічних системах іншої фізичної природи.

Список використаних джерел

1. Теоретичні основи електротехніки : підручник / В. С. Бойко, В. В. Бойко. – К.: ІВЦ “Політехніка”, 2004. – 272 с.
2. Математичні методи ідентифікації динамічних систем / Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, О. Б. Мокін. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 263 с.
3. Теоретичні основи електротехніки. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола : підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук, С. Ш. Кацив, за ред. проф. Ю. О. Карпова. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2019. – 456 с.
4. Ведміцький Ю. Г. Про тривіальну інваріантність передатної функції до функції вхідної дії / Ю. Г. Ведміцький // XVII Міжнародна науково-технічна конференція “ABIA-2025”, 22-24 квітня, 2025 р., Державний університет “Київський авіаційний інститут”, м. Київ, Україна.