

МАТЕМАТИЧНА ІДЕНТИФІКАЦІЯ ОРИГІНАЛУ МЕТОДИЧНОЇ ПОХИБКИ В РОЗВ'ЯЗКУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА ЗА НЕНУЛЬОВИХ ПОЧАТКОВИХ УМОВ

Ведміцький Ю. Г., к.т.н., доцент,
доцент кафедри комп'ютеризованих електромеханічних систем і комплексів,
Вінницький національний технічний університет
e-mail: wjg4224@gmail.com

Задача математичної ідентифікації часової функції оригіналу абсолютної методичної похибки, яка з'являється повсякчас там і тоді, де і коли, керуючись загальноприйнятими правилами, під час визначення основних динамічних характеристик системи не враховують ненульові за умовою задачі Коші незалежні та залежні початкові умови і, відповідно, за основу беруть знулений стан динамічної системи, на превеликий жаль, залишається актуальною і сьогодні. Тому наявна робота і присвячена розв'язуванню зазначеної задачі.

Задачу розв'яжемо в узагальненому вигляді за умови наявності в дробово-раціональній функції зображення методичної похибки не тільки *простих*, але і *кратних* полюсів з різним ступенем кратності [1, 2].

Отже, розглянемо довільне за топологічною структурою лінійне електричне коло з одним джерелом електричної енергії (е.р.с. або струму), яке і слугуватиме генератором збурення динамічної системи дією $x(t)$. Реакцією на таку дію слугуватиме функція $y(t)$ або струму в будь-якій вітці, або напруги на будь-якій ділянці зазначеного кола.

Кількісний зв'язок поміж дією та реакцією на неї встановлюється математичним оператором, що належить до класу лінійних звичайних диференціальних рівнянь:

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y}{dt^k} = \sum_{s=0}^m b_s \frac{d^s x}{dt^s}. \quad (1)$$

Скориставшись інтегральним перетворенням Лапласа і врахувавши окремі властивості останнього, отримуємо операторне рівняння, що зв'язує поміж собою функції зображень вхідної дії $X(p)$ та реакції на неї $Y(p)$ з урахуванням нульових та ненульових початкових умов:

$$\sum_{k=0}^n a_k \left[p^k Y(p) - \sum_{v=0}^{k-1} p^v y^{(k-v-1)}(0_+) \right] = \sum_{s=0}^m b_s \left[p^s X(p) - \sum_{\tau=0}^{s-1} p^\tau x^{(s-\tau-1)}(0_+) \right]. \quad (2)$$

У разі примусового обнулення ненульових за умовою задачі Коші початкових умов, відповідно до (2),

$$Y^*(p) \sum_{k=0}^n a_k p^k = X(p) \sum_{s=0}^m b_s p^s,$$

отримуємо дробово-раціональну функцію операторного зображення абсолютної методичної похибки, що з'явиться в розв'язку диференціального рівняння (1):

$$\Delta Y(p) = Y(p) - Y^*(p) = \frac{\sum_{k=0}^n \sum_{v=0}^{k-1} a_k y^{(k-v-1)}(0_+) p^v}{\sum_{k=0}^n a_k p^k} - \frac{\sum_{s=0}^m \sum_{\tau=0}^{s-1} b_s x^{(k-\tau-1)}(0_+) p^\tau}{\sum_{k=0}^n a_k p^k}, \quad (3)$$

або

$$\Delta Y(p) = \frac{N_y(p)}{M(p)} - \frac{N_x(p)}{M(p)}, \quad (4)$$

де $M = \sum_{k=0}^n a_k p^k$, $N_y = \sum_{k=0}^n \sum_{v=0}^{k-1} a_k y^{(k-v-1)}(0_+) p^v$, $N_x = \sum_{s=0}^m \sum_{\tau=0}^{s-1} b_s x^{(k-\tau-1)}(0_+) p^\tau$

є поліноміальними функціями комплексної змінної.

Часова математична форма методичної похибки $\Delta y(t)$ є функцією-оригіналом дробово-раціональної функції (3, 4) і відповідно до зворотного інтегрального перетворення Лапласа

$$\Delta y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\zeta-j\infty}^{\zeta+j\infty} \Delta Y(p) e^{pt} dp. \quad (5)$$

Скористаємося відомою в теоретичній електротехніці *теоремою про розкладання* [2]. Інтеграл (5), де інтегрування по комплексній частоті p здійснюється вздовж розташованої в комплексній площині нескінченної прямої, еквівалентно замінимо інтегруванням по замкнутому контуру, який охоплює всі n полюсів функції $\Delta Y(p)$, і, відповідно, перейдемо до контурного інтегралу. Водночас, оскільки лишок функції в деякому її полюсі – це величина, на яку змінюється поділений на $2\pi j$ контурний інтеграл, коли контур інтегрування L під час його стягування перетинає зазначений полюс, то замінимо операцію інтегрування операцією додавання по скінченній множині лишків функції $\Delta Y(p)$ в її полюсах:

$$\Delta y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\zeta-j\infty}^{\zeta+j\infty} \Delta Y(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi j} \oint_L \Delta Y(p) e^{pt} dp = \sum \text{Res } \Delta Y(p) e^{pt}. \quad (7)$$

Тоді, відповідно до цієї теореми, у разі наявності з-поміж n полюсів $\{p_1; p_2; \dots; p_n\}$ дробово-раціональної функції (4) *лише простих коренів* рівняння $M(p) = \sum_{k=0}^n a_k p^k = 0$ інтеграл (5) може бути представлений різницею

$$\Delta y(t) = \sum_{i=1}^n \frac{N_y(p_i)}{M'(p_i)} e^{p_i t} - \sum_{i=1}^n \frac{N_x(p_i)}{M'(p_i)} e^{p_i t} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{k=0}^n \sum_{v=0}^{k-1} a_k y^{(k-v-1)}(0_+) p_i^v}{\sum_{k=1}^n k a_k p_i^{k-1}} e^{p_i t} - \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{s=0}^m \sum_{\tau=0}^{s-1} b_s x^{(k-\tau-1)}(0_+) p_i^\tau}{\sum_{k=1}^n k a_k p_i^{k-1}} e^{p_i t}. \quad (9)$$

Якщо ж функція $\Delta Y(p)$ з-поміж n полюсів має q дійсних та комплексно-спряжених простих полюсів $\{p_1; p_2; \dots; p_q\}$, а також і декілька кратних полюсів різного ступеня кратності, наприклад, p_r полюсів кратності r , то з урахуванням, що

$$\text{Res } \Delta Y(p) e^{pt} = \frac{1}{(w-1)!} \frac{d^{w-1}}{d p^{w-1}} \cdot \left[\frac{N(p) (p - p_w)^w e^{pt}}{M(p)} \right]_{p=p_w}, \quad (9)$$

для часової функції-оригіналу методичної похибки остаточно отримуємо:

$$\begin{aligned} \Delta y(t) = & \sum_{i=1}^q \frac{\sum_{k=0}^n \sum_{v=0}^{k-1} a_k y^{(k-v-1)}(0_+) p_i^v}{\sum_{k=1}^n k a_k p_i^{k-1}} e^{p_i t} - \sum_{i=1}^q \frac{\sum_{s=0}^m \sum_{\tau=0}^{s-1} b_s x^{(k-\tau-1)}(0_+) p_i^\tau}{\sum_{k=1}^n k a_k p_i^{k-1}} e^{p_i t} + \\ & + \frac{1}{(r-1)!} \frac{d^{r-1}}{d p^{r-1}} \left[\frac{(p - p_r)^r e^{pt} \sum_{k=0}^n \sum_{v=0}^{k-1} a_k y^{(k-v-1)}(0_+) p^v}{\sum_{k=0}^n a_k p^k} \right]_{p=p_r} - \\ & - \frac{1}{(r-1)!} \frac{d^{r-1}}{d p^{r-1}} \left[\frac{(p - p_r)^r e^{pt} \sum_{s=0}^m \sum_{\tau=0}^{s-1} b_s x^{(k-\tau-1)}(0_+) p^\tau}{\sum_{k=0}^n a_k p^k} \right]_{p=p_r} + \dots \end{aligned}$$

Отже, в роботі на основі операторного зображення за Лапасом проведено математичну ідентифікацію оригіналу методичної похибки, яка з'являється в розв'язку диференціального рівняння електричного кола у разі примусового обнулення ненульових за умовою задачі Коші початкових умов, що доповнює вихідний базис теоретичної електротехніки.

Список використаних джерел

1. Математичні методи ідентифікації динамічних систем / Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, О. Б. Мокін. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 263 с.
2. Теоретичні основи електротехніки. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола : підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук, С. Ш. Кацив, за ред. проф. Ю. О. Карпова. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2019. – 456 с.