

ЗАКОН ВІДОБРАЖЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ОДНОВИМІРНОЇ СИСТЕМИ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ В ЙОГО КОМПЛЕКСНУ ФОРМУ НА ПРИКЛАДІ ДВОПРОВІДНОЇ ДОВГОЇ ЛІНІЇ

**Ю.Г. Ведміцький, Д.О. Медончак, М.В. Постернак,
Д.А. Кушнір, О.В. Шарандак**

*Вінницький національний технічний університет,
Хмельницьке шосе, 95, м.Вінниця, 21021, Україна,
e-mail: wjg4224@gmail.com*

В роботі проведено математичну ідентифікацію фізичних процесів, які спостерігаються в одновимірній однорідній стаціонарній динамічній системі з розподіленими параметрами на прикладі двопровідної довгої лінії, для якої на основі рівнянь Хевісайда (телеграфних рівнянь) розкрито закон відображення одновимірного хвильового рівняння довгої лінії в його комплексну форму.

Ключові слова: *теоретична електротехніка, електричне коло з розподіленими параметрами, довга лінія, динамічна система, диференціальні рівняння в частинних похідних, телеграфні та хвильові рівняння, напруга, струм*

LAW OF MAPPING A DIFFERENTIAL EQUATION OF A ONE-DIMENSIONAL SYSTEM WITH DISTRIBUTED PARAMETERS INTO ITS COMPLEX FORM USING THE EXAMPLE OF A TWO-WIRE LONG LINE

**Y.G. Vedmitskyi, D.O. Medonchak, M.V. Posternak,
D.A. Kushnir, O.V. Sharandak**

*Vinnytsia National Technical University,
95, Khmelnytske shose, Vinnytsia, Ukraine, 21021
e-mail: wjg4224@gmail.com*

The paper deals with the mathematical identification of physical processes observed in a one-dimensional homogeneous stationary dynamic system with distributed parameters on the example of a two-wire long line, for which the law of mapping the one-dimensional wave equation of the long line into its complex form is revealed on the basis of the Heaviside equations (telegraphic equations).

Key words: *theoretical electrical engineering, electric circuit with distributed parameters, long line, dynamic system, partial differential equations, telegraph and wave equations, voltage, current*

Робота присвячена уточненню окремих положень *теорії довгої лінії*. Зазначена теорія є важливою складовою вихідного базису *теоретичних основ електротехніки* [1-4], оскільки виявляє та розкриває фундаментальні властивості електричних кіл з розподіленими параметрами. Необхідність таких уточнень обумовлена багатьма чинниками. Найістотнішими з них для авторів стала потреба в пошуку довершеної форми математичного узагальнення щодо опису фізичних процесів, які спостерігаються або можуть спостерігатися в *двопровідній довгій лінії* – одновимірній електромагнітній системі з розподіленими параметрами під час транспортування нею електричної енергії або передачі інформації. Зазначене і є *метою* нашої роботи. Отже, розглянемо двопровідну довгу лінію. Фізичні процеси в такому електричному колі описуються системою диференціальних рівнянь в частинних похідних *О. Хевісайда*, названих в теоретичній електротехніці “*телеграфними рівняннями*”:

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \end{cases} \quad (1)$$

Система (1) слугує основою для побудови *хвильового рівняння*, складеного відносно миттєвої напруги $u(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - L_0 C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (G_0 L_0 + R_0 C_0) \frac{\partial u}{\partial t} - R_0 G_0 u = 0. \quad (2)$$

Диференціальне рівняння (2) належить до класу *рівнянь математичної фізики* виду

$$A(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0.$$

За синусоїдного режиму роботи довгої лінії розв'язком рівняння (1) буде функція

$$u(x, t) = U_m(x) \sin(\omega t + \psi_u(x)),$$

а її комплексним зображенням (комплексом її діючого значення) – $\underline{U}(x) = \frac{U_m(x)}{\sqrt{2}} e^{j\psi_u(x)}$.

Відтак на основі хвильового рівняння (2) побудуємо *диференціальне рівняння двопровідної довгої лінії в комплексній формі*, виявивши, таким чином, поміж ними математичний зв'язок і встановивши в ньому відповідний йому закон відображення. Оскільки вздовж довгої лінії для миттєвої напруги

$$u(x, t) = \text{Im}\{U_m(x) e^{j\psi_u(x)} e^{j\omega t}\} = \sqrt{2} \text{Im}\{\underline{U}(x) e^{j\omega t}\},$$

то для першої і другої її частинних похідних за часом t та просторовою координатою x маємо:

$$\text{а) } \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \omega U_m(x) \sin\left(\omega t + \psi_u(x) + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \text{Im}\{j\omega \underline{U}(x) e^{j\omega t}\};$$

$$\text{б) } \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 U_m(x) \sin(\omega t + \psi_u(x)) = \sqrt{2} \text{Im}\{-\omega^2 \underline{U}(x) e^{j\omega t}\};$$

$$\text{в) } \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{dU_m(x)}{dx} \sin(\omega t + \psi_u(x)) + U_m(x) \sin\left(\omega t + \psi_u(x) + \frac{\pi}{2}\right) \frac{d\psi_u(x)}{dx} = \sqrt{2} \text{Im}\left\{\frac{d\underline{U}(x)}{dx} e^{j\omega t}\right\};$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{d^2 U_m(x)}{dx^2} \sin(\omega t + \psi_u(x)) + 2 \frac{dU_m(x)}{dx} \sin\left(\omega t + \psi_u(x) + \frac{\pi}{2}\right) \frac{d\psi_u(x)}{dx} - \\ &- U_m(x) \sin(\omega t + \psi_u(x)) \left(\frac{d\psi_u(x)}{dx}\right)^2 + U_m(x) \sin\left(\omega t + \psi_u(x) + \frac{\pi}{2}\right) \frac{d^2 \psi_u(x)}{dx^2} = \sqrt{2} \text{Im}\left\{\frac{d^2 \underline{U}(x)}{dx^2} e^{j\omega t}\right\}. \end{aligned}$$

Підставляємо наведені співвідношення в рівняння (2) і після еквівалентних перетворень та спрощень отримуємо диференціальне рівняння довгої лінії, складене відносно *комплексу діючого значення напруги* $\underline{U}(x)$

$$\frac{d^2 \underline{U}(x)}{dx^2} - (R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0) \underline{U}(x) = 0. \quad (3)$$

Рівняння (3) відоме в теоретичній електротехніці як *диференціальне рівняння довгої лінії в комплексній формі*.

Висновки

В роботі проведено математичну ідентифікацію фізичних процесів, які спостерігаються в одновимірній однорідній стаціонарній динамічній системі з розподіленими параметрами на прикладі двопровідної довгої лінії, для якої на основі рівнянь Хевісайда (телеграфних рівнянь) розкрито закон відображення одновимірного хвильового рівняння довгої лінії в його комплексну форму. Отримані результати доповнюють вихідний базис теорії довгої лінії.

ПОСИЛАННЯ

1. Теоретичні основи електротехніки: підручник / В. С. Бойко, В. В. Бойко. – К.: ІВЦ "Політехніка", 2004. – 272 с.
2. Теоретичні основи електротехніки. Електромагнітне поле : підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2014. – 392 с.
3. Теоретичні основи електротехніки. Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими та розподіленими параметрами : підручник / Ю. О. Карпов, С. Ш. Каців, В. В. Кухарчук, Ю. Г. Ведміцький ; під ред. проф. Ю. О. Карпова – Вінниця : ВНТУ, 2019. – 377 с.
4. Теоретичні основи електротехніки. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола: підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук, С. Ш. Каців, за ред. проф. Ю. О. Карпова. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2019. – 456 с.