

Клас багатовимірних 2π -періодичних функцій, побудованих над полями значень тригонометричних функцій

Виявлено і описано проблему параметричної одновимірності відомих 2π -періодичних функцій, заданих над полями значень тригонометричних синуса або косинуса. З метою вирішення цієї проблеми побудовано багатовимірний параметричний простір, в якому сформовано клас чотиривимірних 2π -періодичних функцій, а також окреслено параметричну область їх визначення, виявлені окремі властивості, запропоновані основні напрямки практичного застосування таких функцій.

Вступ

Клас 2π -періодичних функцій, які сформовано над полями значень тригонометричних функцій синуса або косинуса, має винятково важливе значення як у вихідному базисі теоретичної електротехніки, так і в його додатках – електроенергетиці, електромеханіці, інформаційній та силовій електроніках [1-5].

Причин цьому декілька. З-поміж основних – унікальна здатність 2π -періодичних функцій математично точно описувати інформаційні та енергетичні процеси, що спостерігаються як у природному довіллі, так і в технічному сегменті ноосфери людини.

Водночас наразі не можна не помітити, що ресурс потенціальних можливостей зазначених 2π -періодичних функцій на сьогодні достатньо не розкритий – здебільшого як в теорії, так і на практиці експлуатують переважно найпростіші та найпримітивніші їх реалізації [1-3].

Прикладом може слугувати *одновимірною* 2π -періодичною функцією вихідної напруги $u_{\text{вих}}(\alpha, \theta)$, яку формує силовий перетворювач класу АС-АС – регулятор змінного струму (рис. 1).

Відповідно до алгоритму його роботи середньоквадратичний функціонал 2π -періодичної функції вихідної напруги, а в технічних термінах – її діюче (ефективне) значення, поставлено в пряму залежність від параметра α – *кута вмикання*, сформованого системою імпульсно-фазового керування (СІФК):

$$U_{\text{вих}}(\alpha) = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_{\text{вих}}^2(\alpha; \theta) d\theta} = \frac{U_m}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\pi - \alpha + \sin \alpha \cos \alpha}, \quad (1)$$

що, як наслідок, створює принципову можливість безпосереднього зовнішнього впливу з боку СІФК на характер реалізації силового процесу під час транспортування енергетичного потоку або виконання ним *корисної роботи*.

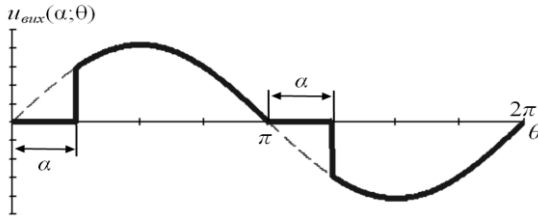


Рис. 1. Одновимірні 2π -періодична функція $u(\alpha; \theta)$

Проте *одновимірність* математичного простору, в якому сформовано 2π -періодичну функцію вихідної напруги, суттєво обмежує здатність СІФК водночас впливати на інші показники, найгірше, – саме на ті з них, які характеризують якість такої реалізації. І в багатьох випадках не тільки обмежує, але навіть і унеможливує цей вплив взагалі.

Розв'язати цю проблему в межах *одновимірного* простору теоретично неможливо!

Тому для вирішення виявленої проблеми автором пропонується здійснити *узагальнення* зазначених 2π -періодичних функцій і сформувати на цій основі клас *багатовимірних* функцій, що задані над полями значень тригонометричних синуса або косинуса, з наступним дослідженням їх якостей, властивостей та характеристик стосовно можливості та доцільності подальшого практичного застосування як на теоретично-абстрагованому рівні, так і в конкретному випадку вже розглянутого нами регулятора змінного струму.

Чотиривимірні 2π -періодичні функції

Чотиривимірною 2π -періодичною функцією $u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta)$, заданою над полями значень тригонометричних синуса або косинуса, називатимемо узагальнену функцію від п'яти незалежних змінних – чотирьох параметричних $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ і однієї процесуальної $\theta = \omega t$, визначену аналітичним співвідношенням:

$$u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta) = U_m \sin \theta \times \{ \mathbf{1}(\theta - \alpha_1) - \mathbf{1}[\theta - (\alpha_1 + \beta_1)] + \mathbf{1}[\theta - (\pi + \alpha_2)] - \mathbf{1}[\theta - (\pi + \alpha_2 + \beta_2)] \}, \quad (2)$$

де $\mathbf{1}(\theta)$ – одинична функція Хевісайда; U_m – амплітудне значення синусоїдної функції та її аргумент – $\theta = \omega t = 2\pi f t = \frac{2\pi}{T} t$; $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ –

впорядковані четвірки (рис. 2), які є елементами лінійного (векторного) *чотиривимірного* простору з заданою в ньому *структурою*: множиною підмножин аксіоматично підпорядкованих бінарних математичних відношень поміж зазначеними упорядкованими четвірками – передусім визначеними в просторі операціями додавання та множення на скаляр.

Відтак кожному з упорядкованих четвірок $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ в зазначеному чотиривимірному просторі бієктивно (взаємно-однозначно) співвіднесено з одною і лише одною, окремо узятою, 2π -періодичною функцією, яка в такому разі залежатиме тільки від *однієї* змінної – кута θ (або часу t).

Це означає, що у разі інтегрування за змінною θ (або за часом t) чотиривимірної 2π -періодичної функції $u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta)$ або деякої *складної* підінтегральної функції $\psi[u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta)]$, залежної від чотиривимірної 2π -періодичної функції, наприклад, під час визначення *функціоналу* J , інтеграл також виявлятиме себе як функція від значень впорядкованої четвірки

$$J(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = \int \psi[u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta)] d\theta, \quad (3)$$

де за параметричну область визначення такого функціоналу слугуватиме побудований нами чотиривимірний простір з структурованими у ньому елементами зазначених четвірок $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ (рис. 2)

$$\vec{r}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = \alpha_1 \vec{i} + \beta_1 \vec{j} + \alpha_2 \vec{k} + \beta_2 \vec{l}. \quad (4)$$

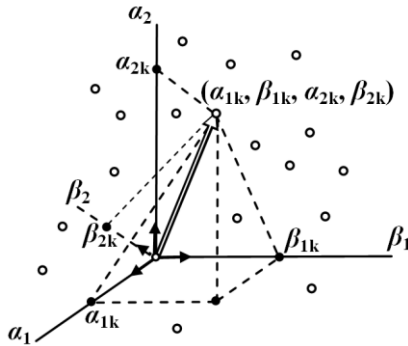


Рис. 2. Параметрична область визначення чотиривимірної 2π -періодичної функції $u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta)$, побудованої на упорядкованих четвірках

Таким чином, чотиривимірна розмірність простору параметричної області визначення створює принципову можливість вирішувати *оптимізаційні задачі*, тобто знаходити такі значення впорядкованих четвірок і, відповідно, такі 2π -періодичні функції, де один з функціоналів залишатиметься заданим, а інші функціонали – *екстремальними*.

В контексті зазначеного варто зауважити, що і середнє значення 2π -періодичної функції на періоді

$$U_d(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta) d\theta, \quad (5)$$

і її середньоквадратичне значення

$$U(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^2(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta) d\theta}, \quad (6)$$

і коефіцієнти Фур'є з однойменного ряду

$$A^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad (7)$$

$$B^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta) \sin(n\theta) d\theta, \quad (8)$$

і амплітудно-частотний

$$U_m^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = \sqrt{\left[A^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) \right]^2 + \left[B^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) \right]^2} \quad (9)$$

та фазово-частотний спектри силового процесу

$$\psi_u^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = \begin{cases} \arctg \frac{A^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}{B^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}, & B^{(n)} \geq 0; \\ \pm\pi + \arctg \frac{A^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}{B^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}, & B^{(n)} < 0, \end{cases} \quad (10)$$

і численні параметри, які на цих спектрах побудовані і їх оцінюють, наприклад, коефіцієнт нелінійних спотворень (total harmonic distortion)

$$THD(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} \left[U^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) \right]^2}}{U^{(1)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)} \quad (11)$$

тощо власне і є тими функціоналами, про які автор наразі веде мову!

Наведемо графік визначеної вище аналітично формулою (2) чотирирівимірної 2π -періодичної функції $u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta)$ із заданою впорядкованою четвіркою її координат $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ (рис. 3).

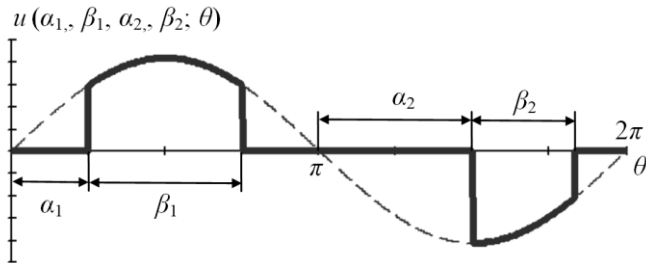


Рис. 3. Чотирирівимірна 2π -періодична функція $u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta)$

З рисунка видно, що простір упорядкованих четвірок, в якому визначено чотирирівимірну 2π -періодичну функцію, не є відкритим, позаяк всі

чотири координати його координатного базису $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ підпорядковані системі умов, заданих нерівностями:

$$\{\alpha_1 + \beta_1 \leq \pi; \alpha_2 + \beta_2 \leq \pi; \alpha_1 \geq 0; \beta_1 \geq 0; \alpha_2 \geq 0; \beta_2 \geq 0. \quad (12)$$

Водночас попри дію цієї системи всі чотири координати упорядкованих четвірок $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ є незалежними, тобто жодну з них не можна визначити через інші, оскільки їх лінійні комбінації

$$C_{\alpha_1} \alpha_1 + C_{\beta_1} \beta_1 + C_{\alpha_2} \alpha_2 + C_{\beta_2} \beta_2 = 0, \quad (13)$$

окрім тривіального випадку, дорівнюють нулю лише у разі, якщо нулю дорівнюють всі коефіцієнти співвідношення (13) водночас.

Наприкінці автор зазначає, що чотиривимірним 2π -періодичним функціям притаманний досить високий *рівень узагальненості* (логічної сили), оскільки відносно них навіть тригонометричні функції синуса, а у разі введення в співвідношення (2) початкової фази – і косинуса, виявляють себе в площині $(\alpha_1 = 0, \beta_1 = \pi, \alpha_2 = 0, \beta_2 = \pi)$ чотиривимірного простору параметричної області визначення лише як їх окремі випадки.

Висновки

В роботі на прикладі дослідження алгоритму функціонування системи силової електроніки класу АС-АС – регулятора змінного струму висвітлена проблема *одновимірності* відомих 2π -періодичних функцій, побудованих на значення тригонометричних синуса або косинуса.

Для вирішення цієї проблеми побудовано багатовимірний параметричний простір, в якому сформовано клас *чотиривимірних* 2π -періодичних функцій, а також окреслено параметричну область їх визначення, виявлені окремі властивості, запропоновані основні напрямки практичного застосування цих функцій.

Література

1. Електроніка і мікросхемотехніка. Силова електроніка. Том 4. Кн. 1 / В. І. Сенько, М. В. Панасенко, Є. В. Сенько, М. М. Юрченко, Л. І. Сенько, В. В. Ясинський. – Київ: «Каравела», 2012 р. – 640 с.
2. Erickson R. W., Maksimovic D. Fundamentals of Power Electronics / R. W. Erickson, D. Maksimovic. – Boulder: Springer, 2020. – 1103 p.
3. Промислова електроніка / В. С. Руденко, В. Я. Ромашко, В. В. Трифонюк. – Київ: Либідь, 1993 р. – 432 с.
4. ТОЕ. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола: підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук, С. Ш. Каців, за ред. проф. Ю. О. Карпова. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2019. – 456 с.
5. ТОЕ. Методи розрахунку нелінійних електричних і магнітних кіл в прикладах та задачах / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2017. – 262 с.