

**В. М. Михалевич
Д. А. Чумакова
С. В. Безверха
М. О. Балибюк**

ЗАДАЧА ДОВЕДЕННЯ ТОТОЖНОСТІ ФОРМУЛ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ КУТА МІЖ ДВОМА ПРЯМИМИ ЗАСОБАМИ СКМ MAPLE

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі досліджуються різні аналітичні способи визначення кута між двома прямими на площині. Розглянуто формулу через скалярний добуток нормальних векторів загальних рівнянь прямих та формулу через кутові коефіцієнти. Показано як засобами системи комп'ютерної математики Maple може бути здійснено доведення тотожності відповідних виразів. Отримані результати демонструють ефективність використання СКМ Maple для формалізованого доведення математичних тверджень та перевірки аналітичних перетворень.

Ключові слова: Maple, кут між двома прямими, косинус, тангенс.

Abstract

The paper investigates various analytical methods for determining the angle between two lines in the plane. The formula based on the scalar product of the normal vectors of the general equations of the lines and the formula expressed through their slopes are considered. Using the computer algebra system Maple, symbolic transformations are performed to prove the identity of the corresponding expressions. The obtained results demonstrate the effectiveness of Maple as a tool for the formal proof of mathematical statements and for verifying analytical transformations.

Keywords: Maple, angle between two lines, cosine, tangent.

Вступ

Системи комп'ютерної математики (СКМ) є важливим інструментом сучасної математичної освіти та наукових досліджень, оскільки забезпечують можливість виконання як числових, так і символьних обчислень високого рівня складності [1, 2, 3, 4, 5]. Їх використання у процесі вивчення аналітичної геометрії дозволяє формалізувати аналітичні перетворення, здійснювати перевірку тотожностей та реалізовувати алгоритмічний підхід до доведення математичних тверджень. У зв'язку з цим зростає актуальність досліджень, спрямованих на методично обгрунтоване застосування СКМ у навчальному процесі [6, 7, 8, 9, 10].

Результати дослідження

Постановка задачі

Дано:

- загальні рівняння двох прямих на площині

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \quad (1)$$

$$A_2 x + B_2 y + C_1 = 0. \quad (2)$$

Необхідно:

- Знайти кут між заданими прямими:
 - через косинус кута між нормальними векторами прямих;
 - через тангенс різниці їх кутових коефіцієнтів.
- Довести еквівалентність отриманих результатів з використанням засобів СКМ Maple.

Приклади застосування тренажера

У середовищі комп'ютерної математики Maple розроблено фрагменти процедури для демонстрації можливості символьного доведення тотожності різних формул визначення кута між двома прямими на площині. Процедура ґрунтується на методах аналітичної геометрії та тригонометричних перетвореннях і передбачає роботу з загальними рівняннями прямих або їх кутовими коефіцієнтами. Алгоритм реалізує послідовне введення коефіцієнтів прямих, формування відповідних аналітичних виразів для косинуса та тангенса кута між ними, виконання символьних перетворень і спрощення отриманих формул засобами Maple. Зокрема, здійснюється приведення виразів до спільного аналітичного вигляду та перевірка їх тотожності шляхом обчислення різниці між ними. Нижче наведено окремі фрагменти реалізації цієї процедури та результати її роботи.

Відомо, що кут між двома прямими на площині можна знаходити за різними формулами. Якщо прямі задані загальними рівняннями:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$

$$A_2 x + B_2 y + C_1 = 0$$

косинус гострого (або прямого) кута між цими прямими зручно знаходити за формулою косинуса кута між двома векторами: нормальними векторами прямих

$$\cos(\alpha) = \frac{|N_1(A_1, B_1), N_2(A_2, B_2)|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

$$\frac{1}{\cos(\alpha)^2} = \frac{(A_1^2 + B_1^2)(A_2^2 + B_2^2)}{(A_1 A_2 + B_1 B_2)^2} \quad (3)$$

Якщо для двох прямих відомі їх кутові коефіцієнти:

$$k_1, k_2$$

тангенс гострого кута між цими прямими можна визначити за відомою формулою

$$\tan(\alpha) = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right| \quad (4)$$

Далі, на основі формул (1), (2) слід визначити кутові коефіцієнти, обчислити тангенс шуканого кута за формулою (4) та засобами Maple довести виконання відповідної тотожності

$$\frac{1}{\cos(\alpha)^2} = 1 + \tan(\alpha)^2.$$

Висновки

У межах дослідження проаналізовано способи визначення кута між прямими за двома різними формулами – через скалярний добуток їх нормальних векторів та через співвідношення кутових коефіцієнтів. Продемонстровано використання інструментів Maple для доведення аналітичної тотожності відповідних формул. Проведене дослідження підтверджує доцільність застосування Maple не лише для автоматизації обчислень, а й для теоретичного аналізу задач аналітичної геометрії. Створення відповідного Maple-тренажера сприятиме унаочненню отриманих результатів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Михалевич В. М. Навчально-контролюючий Maple — комплекс з вищої математики / В. М. Михалевич // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. — 2004. — № 1. — С. 74–78.
2. Михалевич В. М. Розвиток системи Maple у навчанні вищої математики майбутніх інженерів-механіків : монографія / В. М. Михалевич, Я. В. Крупський. — Вінниця: ВНТУ, 2013. — 236 с. ISBN. — 978-966-641-539-7.
3. Михалевич В.М. Елементарна математика. Алгебра. Новітні інформаційні технології навчання (Maple). Ч. 2. : практикум / В. М. Михалевич, А. Ф. Дода. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 160 с. (надрукований в 2011 р.)
4. Михалевич В. М. Розвиток системи Maple у навчанні вищої математики [Електронний ресурс] / В. М. Михалевич, Я. В. Крупський // Інформаційні технології і засоби навчання. — 2011. — Т. 21 — № 1. — Режим доступу до журн. : <http://journal.iitta.gov.ua>.
5. Бондаренко З. В. Курс вищої математики з комп'ютерною підтримкою. Диференціальні рівняння : навч. посіб. / З. В. Бондаренко, В. І. Ключко. – Вінниця : ВНТУ, 2004. – 130 с.
6. Михалевич В. М. Організація самостійної роботи студентів шляхом використання системи комп'ютерної математики Maple / В. М. Михалевич, Я. В. Крупський, О. І. Тютюнник // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2014. — № 3. — С. 114–118.
7. Дерещ Є. В. Дослідження готовності студентів до використання комп'ютерно-орієнтованих систем навчання математики / Є. В. Дерещ // Збірник наукових праць Дніпровського державного університету. - 2017.
8. Михалевич В. М. Використання систем комп'ютерної математики у процесі навчання лінійного програмування студентів ВНЗ: монографія / В. М. Михалевич, О. І. Тютюнник. – Вінниця: ВНТУ, 2016. – 279 с. ISBN 978-966-641-670-7.
9. Михалевич В. М. Проектування навчальних задач з лінійного програмування з використанням систем комп'ютерної математики [Електронний ресурс] / В. М. Михалевич, О.І. Тютюнник // Інформаційні технології і засоби навчання. — 2013. — Т. 38 — № 6. — Режим доступу до журн. : <http://journal.iitta.gov.ua>.

10. Тютюнник О. І. Реалізація принципу наочності за допомогою засобів СКМ у процесі навчання лінійного програмування / О. І. Тютюнник, В. М. Михалевич // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми // Зб. наук. пр. – Випуск 36 / Редкол.: І.А. Зязюн (голова) та ін. – Київ-Вінниця : ТОВ фірма “Планер”, 2013, – С.434-440.

Дар'я Антонівна Чумакова – студентка групи ІБС-25Б, факультет інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії. Вінницький національний технічний університет, Вінниця, email: chumakovadasha85@gmail.com

Софія Віталіївна Безверха – студентка групи ІБС-25Б, факультет інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії. Вінницький національний технічний університет, Вінниця, email: sonybezverha@gmail.com

Микола Олександрович Балибюк – студент групи ІБС-25Б, факультет інформаційних технологій і комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: mykola.2x8@gmail.com

Науковий керівник: *Володимир Маркусович Михалевич*— д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: mykhalevych@vntu.edu.ua

Chumakova Daria A. – student of group 1BS-25B, Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: chumakovadasha85@gmail.com

Bezverha Sofia V. – student of group 1BS-25B, Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: sonybezverha@gmail.com

Balybiuk Mykola O. – student of group 1BS-25B, Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: mykola.2x8@gmail.com

Supervisor: *Mykhalevych Volodymyr M.* —Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of the Chair for Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, mykhalevych@vntu.edu.ua.