

КОМПОЗИЦІЯ ДВОХ СИМЕТРІЙ ВІДНОСНО ПЛОЩИН, ЩО ПРОХОДЯТЬ ЧЕРЕЗ ПОЧАТОК КООРДИНАТ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

Ми знаходимо матрицю композиції двох симетрій відносно площин, кожна з яких проходить через початок координат. Така композиція є поворотом на кут 2φ навколо прямої перетину даних двох площин, де φ – кут між площинами.

Ключові слова: симетрія відносно площини, лінійне перетворення, матриця лінійного перетворення, композиція лінійних перетворень.

Abstract

We find the matrix of the composition of two symmetries with respect to planes, each of which passes through the origin. Such a composition is a rotation by an angle 2φ about the line of intersection of the given two planes, where φ is the angle between the planes.

Keywords: symmetry with respect to the plane, linear transformation, linear transformation matrix, composition of linear transformations.

Нехай в тривимірному декартовому просторі задано площину P . Легко перевірити, що симетрія відносно площини P буде лінійним перетворенням векторного простору R^3 тоді і лише тоді, коли площина P проходить через початок координат. Будь-яке рівняння площини P , яка проходить через початок координат можна подати в такій формі:

$$P: \cos \alpha \cdot x + \cos \beta \cdot y + \cos \gamma \cdot z = 0,$$

де $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ – координати перпендикулярного (нормального) до площини P орта. Зазначимо, що α, β, γ – це ті кути, які утворює нормальний орт відповідно з осями OX, OY, OZ . Крім того слід відмітити, що

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Далі, нехай $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – довільна точка в просторі R^3 . Позначимо через $M'(x'; y'; z')$ точку, яка симетрична точці M_0 відносно площини P , а через $M''(x''; y''; z'')$ – проекцію точки M_0 на площину P . Наша перша задача – виразити координати точки M' через координати точки M_0 . Для цього спочатку координати точки M'' виразимо через координати точки M_0 . Запишемо параметричне рівняння прямої L , яка проходить через точку M_0 і перпендикулярна до площини P . Оскільки напрямним вектором прямої L є вектор $\vec{q} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, то параметричне рівняння прямої L має такий вигляд:

$$\frac{x - x_0}{\cos \alpha} = \frac{y - y_0}{\cos \beta} = \frac{z - z_0}{\cos \gamma} = t.$$

Останнє рівняння запишемо в більш зручній для нас формі:

$$\begin{cases} x = x_0 + \cos \alpha \cdot t, \\ y = y_0 + \cos \beta \cdot t, \\ z = z_0 + \cos \gamma \cdot t. \end{cases}$$

Позначимо через t'' параметр, що відповідає точці M'' . Оскільки $M'' \in P$, то

$$\cos \alpha \cdot (x_0 + \cos \alpha \cdot t'') + \cos \beta \cdot (y_0 + \cos \beta \cdot t'') + \cos \gamma \cdot (z_0 + \cos \gamma \cdot t'') = 0.$$

Розкривши дужки і застосувавши рівність $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, одержуємо:

$$\cos \alpha \cdot x_0 + \cos \beta \cdot y_0 + \cos \gamma \cdot z_0 + t'' = 0.$$

Звідси

$$t'' = -\cos \alpha \cdot x_0 - \cos \beta \cdot y_0 - \cos \gamma \cdot z_0.$$

Отже, координати точки M'' такі:

$$x'' = x_0 + \cos \alpha \cdot t'' = x_0 - \cos \alpha \cdot (\cos \alpha \cdot x_0 + \cos \beta \cdot y_0 + \cos \gamma \cdot z_0).$$

$$y'' = y_0 + \cos \beta \cdot t'' = y_0 - \cos \beta \cdot (\cos \alpha \cdot x_0 + \cos \beta \cdot y_0 + \cos \gamma \cdot z_0).$$

$$z'' = z_0 + \cos \gamma \cdot t'' = z_0 - \cos \gamma \cdot (\cos \alpha \cdot x_0 + \cos \beta \cdot y_0 + \cos \gamma \cdot z_0).$$

Оскільки точка M'' є серединою відрізка M_0M' , то

$$x'' = \frac{x_0 + x'}{2}, \quad y'' = \frac{y_0 + y'}{2}, \quad z'' = \frac{z_0 + z'}{2}.$$

Звідси:

$$x' = 2x'' - x_0 = x_0 - 2\cos^2 \alpha \cdot x_0 - 2\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot y_0 - 2\cos \alpha \cdot \cos \gamma \cdot z_0;$$

$$y' = 2y'' - y_0 = y_0 - 2\cos \beta \cdot \cos \alpha \cdot x_0 - 2\cos^2 \beta \cdot y_0 - 2\cos \beta \cdot \cos \gamma \cdot z_0;$$

$$z' = 2z'' - z_0 = z_0 - 2\cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot x_0 - 2\cos \beta \cdot \cos \gamma \cdot y_0 - 2\cos^2 \gamma \cdot z_0.$$

Позначимо через S перетворення симетрії відносно площини P . Проста (але марудна) перевірка показує, що перетворення $S: (x_0; y_0; z_0) \mapsto (x'; y'; z')$ є лінійним перетворенням векторного простору R^3 . Знайдемо матрицю цього лінійного перетворення в стандартному базисі

$$\vec{i} = (1; 0; 0), \quad \vec{j} = (0; 1; 0), \quad \vec{k} = (0; 0; 1).$$

Для цього лінійним перетворенням S подіємо на базисні вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

$$S(\vec{i}) = S((1; 0; 0)) = (1 - 2\cos^2 \alpha; -2\cos \alpha \cdot \cos \beta; -2\cos \alpha \cdot \cos \gamma).$$

$$S(\vec{j}) = S((0; 1; 0)) = (-2\cos \beta \cdot \cos \alpha; 1 - 2\cos^2 \beta; -2\cos \beta \cdot \cos \gamma).$$

$$S(\vec{k}) = S((0; 0; 1)) = (-2\cos \alpha \cdot \cos \gamma; -2\cos \beta \cdot \cos \gamma; 1 - 2\cos^2 \gamma).$$

Отже, матриця M_S^P – симетрії S відносно площини P , має вигляд:

$$M_S^P = \begin{pmatrix} 1 - 2\cos^2 \alpha & -2\cos \alpha \cdot \cos \beta & -2\cos \alpha \cdot \cos \gamma \\ -2\cos \alpha \cdot \cos \beta & 1 - 2\cos^2 \beta & -2\cos \beta \cdot \cos \gamma \\ -2\cos \alpha \cdot \cos \gamma & -2\cos \beta \cdot \cos \gamma & 1 - 2\cos^2 \gamma \end{pmatrix}.$$

Матриця M_S^P – це математична модель лінійного перетворення S відносно площини

$$P: \cos \alpha \cdot x + \cos \beta \cdot y + \cos \gamma \cdot z = 0,$$

Оскільки симетрія відносно площини очевидно є ізометрією (тобто перетворенням, що зберігає відстань між точками), то матриця M_S^P є ортогональною (див. [1]). Як відомо (див. [1]), стовпці ортогональної матриці нормовані і попарно ортогональні (тобто їх скалярний добуток дорівнює нулю). Для прикладу перевіримо, що перший стовпець матриці M_S^P є нормованим і перші два стовпці – ортогональні. Дійсно,

$$\begin{aligned} 1 - 4\cos^2 \alpha + 4\cos^4 \alpha + 4\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta + 4\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \gamma = \\ = 1 - 4\cos^2 \alpha + 4\cos^4 \alpha + 4\cos^2 \alpha \cdot (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = \end{aligned}$$

$$= 1 - 4\cos^2 \alpha + 4\cos^4 \alpha + 4\cos^2 \alpha \cdot (1 - \cos^2 \alpha) = 1 - 4\cos^2 \alpha + 4\cos^4 \alpha + 4\cos^2 \alpha - 4\cos^4 \alpha = 1.$$

Отже, перший стовпець матриці M_S^P – нормований. Тепер знайдемо скалярний добуток перших двох стовпців матриці M_S^P :

$$\begin{aligned}
& -2\cos\alpha \cdot \cos\beta + 4\cos^3\alpha \cdot \cos\beta - 2\cos\alpha \cdot \cos\beta + 4\cos^3\beta \cdot \cos\alpha + 4\cos^2\gamma \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta = \\
& = 4\cos^3\alpha \cdot \cos\beta - 4\cos\alpha \cdot \cos\beta + 4\cos^3\beta \cdot \cos\alpha + 4\cos^2\gamma \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta = \\
& = 4\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot (\cos^2\alpha + \cos^2\beta) - 4\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot (1 - \cos^2\gamma) = \\
& = 4\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot (1 - \cos^2\gamma) - 4\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot (1 - \cos^2\gamma) = 0.
\end{aligned}$$

Відомо (див. [1]), що детермінант ортогональної матриці дорівнює або -1 або 1 . В даному випадку (це результат громіздких обчислень) $\det(M_S^P) = -1$.

Нехай ми маємо дві площини

$$P_1: \cos\alpha_1 \cdot x + \cos\beta_1 \cdot y + \cos\gamma_1 \cdot z = 0 \text{ і}$$

$$P_2: \cos\alpha_2 \cdot x + \cos\beta_2 \cdot y + \cos\gamma_2 \cdot z = 0,$$

які проходять через початок координат і перетинаються по прямій l . Розглянемо композицію двох перетворень — симетрії відносно площини P_1 і симетрії відносно площини P_2 . Відомо (див. [1]), що композиції двох лінійних перетворень векторного простору в даному базисі відповідає звичайний добуток матриць цих лінійних перетворень в цьому базисі. З огляду на громіздкість, ми не будемо виписувати матрицю $M_S^{P_1} \cdot M_S^{P_2}$, яка відповідає композиції двох симетрій — симетрії відносно площини P_1 і симетрії відносно площини P_2 . Обчислимо визначник матриці $M_S^{P_1} \cdot M_S^{P_2}$:

$$\det(M_S^{P_1} \cdot M_S^{P_2}) = \det(M_S^{P_1}) \cdot \det(M_S^{P_2}) = (-1) \cdot (-1) = 1.$$

Покажемо, що композиція двох симетрій — симетрії відносно площини P_1 і симетрії відносно площини P_2 — це поворот навколо прямої $l = P_1 \cap P_2$ на кут 2φ , де φ — кут між площинами P_1 і P_2 . Цю задачу легко звести до елементарної задачі з планіметрії. А саме: нехай A — довільна точка в просторі. Проекцію точки A на пряму $l = P_1 \cap P_2$ позначимо через C . Через пряму AC проведемо площину P , яка перпендикулярна до прямої $l = P_1 \cap P_2$. Перетин площини P з площинами P_1 і P_2 це відповідно прямі $CK1$ і $CK2$. Зрозуміло, що кут між площинами P_1 і P_2 дорівнює куту між прямими $CK1$ і $CK2$. Позначимо через $A1$ точку, яка симетрична точці A відносно площини P_1 . Через $A2$ позначимо точку, яка симетрична точці $A1$ відносно площини P_2 . Цілком зрозуміло, що при такій побудові, точка $A1$ симетрична до точки A відносно прямої $CK1$, а точка $A2$ симетрична до точки $A1$ відносно прямої $CK2$. Позначимо кут між прямими AC і $CK1$ через ξ , а кут між прямою $CA1$ і прямою $CK2$ через ψ . Тоді $\varphi = \xi + \psi$, а кут між прямими AC і $CA2$ дорівнює $2\xi + 2\psi = 2\varphi$. Що і треба було довести. Звісно, що наше доведення прив'язано до конкретного малюнку (див. рис.1). Інші випадки розташування точки A по відношенню до площин P_1 і P_2 доводяться аналогічно.

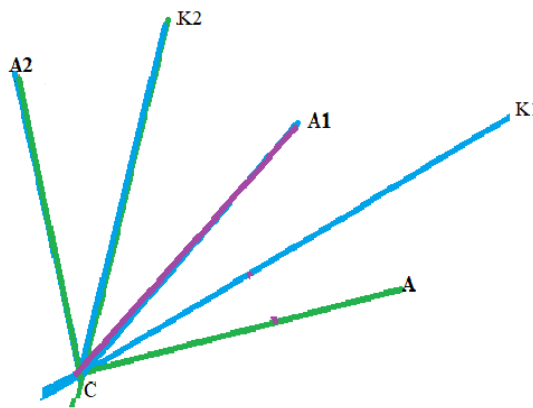


Рис. 1

Залишається скласти рівняння прямої $l = P_1 \cap P_2$. Пряма l проходить через початок координат. Її напрямним вектором буде вектор

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 \\ \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \gamma_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Запишемо рівняння прямої $l = P_1 \cap P_2$:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 \\ \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 \end{vmatrix}} = \frac{y}{-\begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \gamma_2 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 \end{vmatrix}}.$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. David C. Lay, Steven R. Lay, Judi J. McDonald. Linear Algebra and Its Applications: Pearson Education Limited, sixth edition-2022. P. 755.

Боримський Євгеній Володимирович, студент групи СА-24(б) ФІТА Вінницького національного технічного університету, Вінниця, zenia.zt2006@gmail.com

Подзигун Дмитро Костянтинович, студент групи СА-24(б) ФІТА Вінницького національного технічного університету, Вінниця, dmitropodzigun@gmail.com

Науковий керівник: **Дереч Володимир Дмитрович**, кандидат фізико-математичних наук, професор кафедри вищої математики Вінницького національного технічного університету, Вінниця, derech@vntu.edu.ua

Borymskyi Yevhenii Volodymyrovych, student of the Faculty of Intelligent Information Technologies and Automation, VNTU, Vinnytsia, zenia.zt2006@gmail.com

Podzihun Dmytro Kostiantynovych, student of the Faculty of Intelligent Information Technologies and Automation, VNTU, Vinnytsia, dmitropodzigun@gmail.com

Supervisor: **Derech Volodymyr Dmytrovych**, PhD in Mathematics, Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, derech@vntu.edu.ua