

Математичні обмеження матричних методів у сучасній комп'ютерній графіці

¹Вінницький національний технічний університет

Анотація

Робота аналізує три фундаментальні аспекти застосування матричної алгебри в комп'ютерній графіці, що виходять за межі базового конвеєра. На основі сучасних джерел досліджено: обчислювальну складність (NP-твердість) задачі зваженої апроксимації матриць низького рангу (WLRA) та її наслідки для оптимізації графічних даних; проблему стандартизації в матричних перетвореннях кольорних просторів RGB–IHS, що призводить до невідтворюваності результатів у науковій літературі; переваги конформної геометричної алгебри (CGA) перед класичною проєктивною геометрією для операцій, що зберігають відстань. Показано, що розвиток графічних технологій прямо залежить від подолання цих математичних викликів.

Ключові слова: зважена апроксимація низького рангу (WLRA), NP-складність, RGB-IHS перетворення, конформна геометрична алгебра (CGA), однорідні координати.

Abstract

The paper analyses three fundamental aspects of matrix algebra application in computer graphics that go beyond the basic pipeline. Based on modern sources, the following have been investigated: the computational complexity (NP-hardness) of the weighted low-rank approximation (WLRA) problem and its implications for graphics data optimisation; the problem of standardisation in matrix transformations of RGB–IHS colour spaces, which leads to irreproducibility of results in scientific literature; the advantages of conformal geometric algebra (CGA) over classical projective geometry for distance-preserving operations. It is shown that the development of graphics technologies directly depends on overcoming these mathematical challenges.

Keywords: weighted low-rank approximation (WLRA), NP-completeness, RGB-IHS transformation, conformal geometric algebra (CGA), homogeneous coordinates.

Вступ

Матричні перетворення у однорідних координатах є основою графічного конвеєру, що дозволяє через множення на матриці 4×4 виконувати перенесення, обертання, масштабування та проєкцію. Однак еволюція графіки — від фотореалістичного рендерингу до машинного навчання на графічних даних — вимагає розв'язання значно складніших математичних проблем. У роботі систематизовано три ключові напрями сучасних досліджень, кожен з яких ґрунтується на аналізі актуальних наукових публікацій, і показано їх практичну важливість для галузі.

Результати дослідження

NP-твердість як фундаментальне обмеження в оптимізації графічних даних.

У задачах комп'ютерної графіки, таких як відновлення 3D-структури з руху (Structure from Motion) або колаборативна фільтрація для рекомендацій текстур, дані часто представлені великими розрідженими матрицями. Метод зваженої апроксимації низького рангу (WLRA) є основним інструментом для їх стиснення та вилучення ознак [3].

Доведення ґрунтується на редукції відомої NP-повної задачі максимального двобічного кліку (Maximum Biclique) і справедливе для матриць як з дійснозначними, так і з бінарними вагами, що моделює роботу з пропущеними даними. Практичний висновок: неможливість знайти точний поліноміальний алгоритм для WLRA змушує індустрію розробляти та використовувати евристичні методи, такі як алгоритми чергування найменших квадратів (Alternating Least Squares), які дають лише локально-оптимальні розв'язки. Це обмеження встановлює теоретичну межу ефективності для цілого класу інструментів оптимізації в графіці та обробці зображень.

Нестандартизованість колірних перетворень: проблема відтворюваності. Перетворення між кольоровими просторами RGB та IHS (Інтенсивність, Відтінок, Насиченість) є критичним кроком у таких операціях, як підвищення різкості IHS-sharpening та злиття зображень [2].

Дослідження порівнює різні методи IHS-перетворення (Carper, Haydn, Chavez) та демонструє, що вибір різних коефіцієнтів матриці призводить до суттєвих розбіжностей у кінцевій якості зображення, що оцінювалося за кількісними метриками. Наслідком цього є криза відтворюваності: результати досліджень, отримані з використанням різних формул IHS, є важкопорівнянними, що гальмує прогрес у галузі обробки зображень та ускладнює розробку надійних промислових рішень.

Конформна геометрична алгебра: наступний крок після проективної геометрії. Класичний графічний конвеєр працює в рамках проективної геометрії однорідних координат, де перенесення та обертання є лінійними операціями [1].

Конформна геометрична алгебра (CGA) пропонує радикально інший підхід, вбудовуючи евклідов простір у простір вищої розмірності. У цій моделі операції, що зберігають відстань (рухомий рух), описуються уніфіковано як "обертання" в конформному просторі. Це дозволяє отримувати надзвичайно компактні та елегантні алгебраїчні формули для складних операцій. Як класичний приклад, відбиття променя від довільної сферичної поверхні, яке в традиційних координатах вимагає чисельного розв'язання квадратного рівняння, в CGA виражається однією формулою через геометричний добуток. Таким чином, CGA не є лише теоретичним поліпшенням — це практичний інструмент для спрощення та прискорення реалізації складної геометрії.

Табл. 1. Сучасні математичні проблеми в комп'ютерній графіці та їх практичне значення

Проблема / Метод	Основне твердження / Результат	Практичний вплив на галузь
NP-складність WLRA	Задача зваженої апроксимації низького рангу є NP-складною навіть для рангу 1.	Обмежує можливості точної оптимізації великих графічних даних, спрямовує розробку на евристичні алгоритми.
Нестандартизація RGB-IHS	Відсутність єдиної матриці перетворення призводить до неконсистентних результатів обробки.	Ускладнює порівняння досліджень і розробку надійних промислових конвеєрів обробки зображень.
Конформна геом. алгебра (CGA)	CGA зберігає відстані та дозволяє компактний опис складних операцій (напр., відбиття від сфери).	Відкриває шлях до більш точних та ефективних алгоритмів для задач, де критична метрика (VR/AR, симуляції).
Класичні матриці 4×4	Уніфікація афінних та проективних перетворень в однорідних координатах.	Залишається основою апаратного конвеєру та всіх основних графічних API.

Висновки

Сучасна комп'ютерна графіка як галузь стикається не лише з інженерними, але й з глибокими математичними викликами:

1. Теорія складності встановлює принципові межі (NP-твердість) для оптимізації графічних даних, визначаючи напрям розробки алгоритмів.

2. Відсутність стандартів у, начебто, елементарних перетвореннях (RGB-IHS) серйозно уповільнює науковий прогрес і розвиток індустріальних технологій.

3. Розвиток математичного апарату (перехід від проективної геометрії до конформної алгебри) є не абстракцією, а необхідною умовою для створення наступного покоління графічних систем, орієнтованих на точність та складну геометрію.

Таким чином, подальший прогрес у графічних технологіях неможливий без тісної взаємодії фахівців з інформаційних технологій з математиками-теоретиками у галузі алгебри, оптимізації та теорії складності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Doran C. Geometric Algebra and its Application to Mathematical Physics [Електронний ресурс] // arXiv. – 2002. – Режим доступу: <https://arxiv.org/abs/cs/0203026v1> (дата звернення: 13.12.2025).
2. Al-Wassai F. A., Kalyankar N. V., Ali A. A. S. The IHS Transformations Based Image Fusion

[Електронний ресурс] // arXiv. – 2011. – Режим доступу: <https://arxiv.org/abs/1107.4396v2> (дата звернення: 12.12.2025).

3. Gillis N., Glineur F. Low-Rank Matrix Approximation with Weights or Missing Data Is NP-Hard [Електронний ресурс] // arXiv. – 2010. – Режим доступу: <https://arxiv.org/abs/1012.0197v2> (дата звернення: 15.12.2025).

Науковий керівник: **Бондаренко Злата Василівна** – кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця

Сірак Владислав Олегович – студент групи 1KI-25мс, факультет інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: vladsirak9@gmail.com

Supervisor: **Bondarenko Zlata V.** – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia

Sirak Vladislav O. – student of group 1KI-25ms, Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: vladsirak9@gmail.com