

Ряди Фур'є в аналізі та обробці періодичних сигналів

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У тезах розглянуто використання рядів Фур'є для подання та аналізу періодичних сигналів. Пояснюється ідея розкладання складного сигналу на суму гармонічних коливань із різними частотами та амплітудами. Окреслено практичні застосування рядів Фур'є в обробці аудіосигналів, аналізі електричних кіл, цифровій фільтрації шумів та стисненні даних. Наголошено на ролі частотного аналізу як базового інструмента сучасної радіотехніки, телекомунікацій та цифрової обробки сигналів.

Ключові слова: ряд Фур'є, періодичний сигнал, гармонічний аналіз, обробка сигналів, фільтрація.

Abstract

The paper discusses the use of Fourier series for the representation and analysis of periodic signals. It explains the idea of decomposing a complex signal into a sum of harmonic oscillations with different frequencies and amplitudes. The practical applications of Fourier series in audio signal processing, electrical circuit analysis, digital noise filtering, and data compression are outlined. The role of frequency analysis as a fundamental tool in modern radio engineering, telecommunications, and digital signal processing is emphasized.

Keywords: Fourier series, periodic signal, harmonic analysis, signal processing, filtering.

Вступ

Періодичні сигнали відіграють ключову роль у багатьох галузях науки і техніки: від радіозв'язку та електроенергетики до цифрової обробки аудіо- та відеоданих. Для їхнього дослідження необхідні інструменти, які дозволяють переходити від часової форми сигналу до його частотного представлення. Одним із таких фундаментальних інструментів є ряди Фур'є, що дають змогу подати довільний «достатньо гладкий» періодичний сигнал у вигляді суми гармонічних коливань з різними частотами, амплітудами та фазами.

Завдяки цьому стає можливим детально аналізувати спектр сигналу, здійснювати фільтрацію небажаних складових, будувати моделі передавання інформації в каналах зв'язку, а також розробляти ефективні методи стиснення даних.

Метою роботи є розгляд теоретичних засад рядів Фур'є та демонстрація їх практичного застосування в аналізі і обробці періодичних сигналів різної природи.

Результати дослідження

1. Теоретичні засади рядів Фур'є

Ряд Фур'є – це представлення періодичної функції як суми гармонічних складових, тобто синусів і косинусів різних частот. Ідея полягає в тому, що навіть дуже складний періодичний сигнал можна «розкласти» на набір простих гармонічних коливань, які разом точно (або наближено) відтворюють вихідну функцію.

Коефіцієнти ряду Фур'є визначають внесок кожної гармоніки у формування сигналу. Вони обчислюються за спеціальними інтегральними формулами, що враховують середні значення добутків сигналу на відповідні синусо- та косинус-подібні функції на одному періоді.

Важливою рисою рядів Фур'є є їх здатність до збіжності: за виконання певних умов (наприклад, кусочної неперервності та обмеженості функції) часткова сума ряду наближається до значення вихідної функції майже в кожній точці. Це забезпечує можливість практичного використання рядів Фур'є для наближеного відтворення складних сигналів за допомогою обмеженої кількості гармонік.

2. Аналіз періодичних сигналів за допомогою рядів Фур'є

Застосування рядів Фур'є до аналізу періодичних сигналів дозволяє перейти від часової області до частотної. Замість того щоб розглядати форму сигналу як функцію часу, досліджують, з яких частотних складових він складається та якими є їх амплітуди. Таке подання називають спектральним аналізом.

У практиці обробки сигналів часто використовують лише скінченну кількість перших гармонік, що вже забезпечує достатньо точне наближення сигналу. Це пояснюється тим, що високочастотні складові нерідко мають малий внесок або відповідають шумам і перешкодам. Відтинання цих складових призводить до «згладжування» сигналу й одночасно до зменшення впливу шуму.

Розкладання у ряд Фур'є також дозволяє виявляти домінуючі частоти сигналу. Наприклад, у електротехніці це дає можливість аналізувати гармонійні спотворення в мережах змінного струму, а в акустиці – досліджувати складові музичних звуків і їхній тембр.

3. Практичне застосування рядів Фур'є в обробці сигналів

Ряди Фур'є мають широке коло застосувань у реальних технічних системах:

1. Аудіо- та мовні сигнали.

У цифровій обробці аудіо ряди Фур'є лежать в основі спектрального аналізу та фільтрації. Завдяки переходу до частотного представлення можна виділяти окремі частотні діапазони (наприклад, баси або високі частоти), пригнічувати шум, коригувати тембр звуку, а також здійснювати кодування та стиснення аудіоданих.

2. Електричні кола та системи живлення.

У електроенергетиці аналіз гармонік дозволяє оцінювати рівень спотворень напруги та струму в мережах, знаходити небажані високочастотні складові, що можуть призводити до перегріву обладнання або помилок у роботі електронних пристроїв. Ряди Фур'є допомагають описати й розрахувати ці гармонічні складові.

3. Цифрова фільтрація та видалення шумів.

У цифрових системах обробки сигналів (радіозв'язок, телекомунікації, сенсорні системи) ряди Фур'є використовують для проектування фільтрів, які пропускають потрібні частоти та пригнічують небажані. Наприклад, можна створити фільтр низьких частот для згладжування сигналу або смуговий фільтр для виділення обраного діапазону.

4. Стиснення даних.

Ідея подання сигналу через обмежену кількість гармонічних складових лежить в основі методів стиснення деяких типів даних. Якщо більшість енергії сигналу зосереджена в невеликій кількості гармонік, достатньо зберегти лише їх, що зменшує обсяг інформації при незначній втраті якості.

Висновки

Ряди Фур'є є одним з основних інструментів вищої математики для аналізу та обробки періодичних сигналів. Вони дозволяють представити складний сигнал у вигляді суми простих гармонічних коливань, що робить можливим його глибокий спектральний аналіз.

Завдяки цьому ряди Фур'є широко застосовуються в обробці аудіосигналів, аналізі електричних кіл, цифровій фільтрації та стисненні даних. Використання цього апарату забезпечує ефективне розв'язання прикладних задач у радіотехніці, телекомунікаціях, електроенергетиці та інших галузях, де важливими є частотні характеристики сигналів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ:

1. Авдєєва Т. В., Качаснко О. Б. **Ряди Фур'є: практикум з вищої математики для студентів інженерних спеціальностей.** – Київ: НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2016.

2. Стрелковська І. В., Паскаленко В. М. **Ряди Фур'є. Інтеграл Фур'є: навчальний посібник.** – Одеса: Державний університет інтелектуальних технологій і зв'язку, 2021.
3. Oppenheim A. V., Schaffer R. W. **Discrete-Time Signal Processing.** – 3rd ed. – Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2010..
4. Bracewell R. N. **The Fourier Transform and Its Applications.** – 3rd ed. – McGraw-Hill, 2000.
5. Sundararajan D. **Fourier Analysis: A Signal Processing Approach.** – Springer, 2018.

Бризак Вадим Олександрович – студент групи 2КІ-24б, факультет інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: bryzakvadim329@gmail.com

Хом'юк Ірина Володимирівна – д.пед.н., професор, професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: vikiraivh@gmail.com

Bryzhak Vadym Oleksandrovych – student of group 2CI-24b, Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: brizakvadim329@gmail.com

Irina V. Khomyuk – Doctor of Science (Ped.), Professor of Higher Mathematics Department, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95, e-mail: vikiraivh@gmail.com