УДК 72.01:51

Р. Р. Краєвська
В. О. Галяновська
Ю. В. Добранюк

РОЛЬ ГЕОМЕТРІЇ ТА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ В АРХІТЕКТУРІ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі проаналізовано, як вища математика – зокрема геометрія, аналітична геометрія та математичне моделювання – впливає на архітектуру. Демонструється, що математика є не лише інструментом для розрахунків, але й основою естетичних принципів – пропорцій, симетрії, композиції. Розглянуто історичні приклади (від античності і середньовіччя до ісламської архітектури) та сучасні тенденції (параметричне моделювання, оптимізація форм), щоб ілюструвати, чому без серйозного математичного обґрунтування неможливе створення багатьох архітектурних об'єктів – ні функціональних, ні естетичних, ні конструктивно складних.

Ключові слова*:* геометрія, архітектура, вища математика, пропорції, симетрія, формоутворення, математичне моделювання, параметричний дизайн, історична архітектура, естетика, конструктивність.

Abstract

This paper analyzes how higher mathematics – in particular geometry, analytical geometry, and mathematical modeling – influences architecture. It demonstrates that mathematics is not only a tool for calculations, but also the basis for aesthetic principles – proportions, symmetry, and composition. Historical examples (from antiquity and the Middle Ages to Islamic architecture) and contemporary trends (parametric modeling, optimization of forms) are considered to illustrate why, without a serious mathematical foundation, it is impossible to create many architectural objects – whether functional, aesthetic, or structurally complex.

Keywords*:* geometry, architecture, higher mathematics, proportions, symmetry, form creation, mathematical modeling, parametric design, historical architecture, aesthetics, constructiveness.

Вступ

Архітектура – це дисципліна, яка поєднує мистецтво, інженерію, простір і функціональність. З давніх часів люди прагнули не лише зводити міцні, практичні споруди, а й створювати гармонійні, красиві, пропорційні форми. Але для того, щоб перетворити ідею на матеріальну реальність, потрібні точні знання: вимірювання, розрахунки, пропорції [1, 2, 3]. Саме тому математика – і перш за все геометрія – відіграє ключову роль у проєктуванні.

Разом із розвитком цивілізацій розвивалися й математичні знання, що давало змогу створювати все складніші й більш амбітні архітектурні форми [4, 5, 6]. Сьогодні, з появою цифрового моделювання, комп'ютерного дизайну та параметричних проєктів, потреба в математичній підоснові ще більш актуальна. Тому розуміння того, як і навіщо застосовується вища математика в архітектурі – має велике значення як для студентів, так і для практиків.

Результати дослідження

Математика та геометрія є основою архітектурного проєктування: з їхньою допомогою формуються форма, простір, композиція і структура будівлі [7, 8]. Геометричні фігури – коло, квадрат, трикутник, багатокутники – є "цеглинками" архітектурних форм: вони допомагають визначити планування, симетрію, осі, пропорції та взаємодію частин споруди. Куполи з математичної точки зору можна описати як поверхні обертання. Прості і зрозумілі фігури служили основою ще для найдавніших будівель, а згодом складніші форми, багатогранники, арки, куполи, аркади. Ідеалізованою моделлю купола є сфера, яка в декартовій системі координат задається рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Така форма є конструктивно доцільною, оскільки забезпечує рівномірний розподіл навантаження.

Через пропорції, симетрію, а також числові співвідношення архітектори добивалися естетичної гармонії. Наприклад, принцип "золотого перетину" (рис.1), що описується формулою (1) та інші пропорційні співвідношення часто згадуються як засіб досягнення візуальної рівноваги та краси в архітектурі й мистецтві [3, 4, 5]. Завдяки симетрії, пропорціям, правильному співвідношенню частин будівель (фасадів, колон, арок) створюється почуття балансу, гармонії, цілісності простору.

$$\varphi = \frac{AO + OB}{AO} = \frac{AO}{OB}. \quad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61803398874989484... \qquad (1)$$

де AO позначає більшу частину відрізка, OB – меншу частину, $AO + OB$ – повну довжину відрізка, а φ – це коефіцієнт золотого перетину.

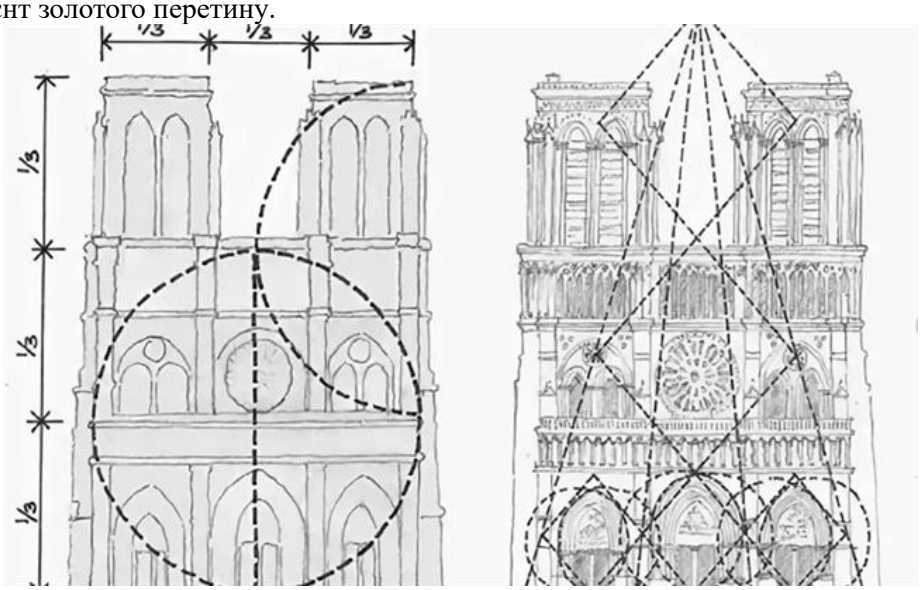

Рис. 1 – Приклад Золотого перетину

З математичної точки зору симетрія може бути описана як геометричне перетворення. Наприклад, осьова симетрія відносно осі y задається перетворенням $(x,y) \rightarrow (-x,y)$, що широко використовується у фасадній архітектурі для досягнення композиційної рівноваги.

Математика також має вирішальне значення для конструктивності та безпеки будівель. За допомогою розрахунків можна визначити навантаження, міцність елементів, стабільність структури, оптимальне розташування колон, арок, плит, балок, тобто те, що гарантує довговічність і надійність споруди.

Архітектори Майкл Оствальд і Кім Вільямс, розглядаючи взаємозв'язки між архітектурою та математикою, зазначають, що ці галузі, як їх зазвичай розуміють, можуть здаватися слабо пов'язаними, оскільки архітектура – це професія, що займається практичним питанням будівництва, тоді як математика – це чисте вивчення чисел та інших абстрактних об'єктів. Але, як вони стверджують, ці дві речі тісно пов'язані і так були з давнини. У Стародавньому Римі Вітрувій описував архітектора як людину, яка знала достатньо інших дисциплін, насамперед геометрію, щоб керувати досвідченими майстрами у всіх інших необхідних сферах, таких як мулярі та теслі. Те саме застосовувалося і в середньовіччі, де випускники вивчали арифметику, геометрію та естетику разом із базовою програмою граматики, логіки та риторики (тривіум) у елегантних залах, зведених майстрами-будівельниками, які керували багатьма ремісниками. Майстер-будівельник на вершині своєї професії отримував звання архітектора або інженера. У епоху Відродження квадривіум з арифметики, геометрії, музики та астрономії став додатковою навчальною програмою, характерною для епохи Відродження, представником якої був Леон Баттіста Альберті. Подібним чином в Англії Крістофер Рен, відомий сьогодні як архітектор, спочатку був відомим астрономом.

Вільямс та Оствальд, аналізуючи взаємозв’язок математики та архітектури з 1500 року за методологією німецького соціолога Теодора Адорно, виділяють три основні напрями серед архітекторів: революційний, який прагне впроваджувати абсолютно нові ідеї; реакційний, що уникає змін; та відроджений, який повертається до традиційних форм. На їхню думку, архітектори епохи Відродження майже не зверталися до математичних знань, що пояснює слабкий зв’язок між математикою та архітектурою в такі періоди, зокрема під час готичного відродження в Англії у XIX столітті. Так само у періоди повернення до старих традицій, як-от італійський маньєризм (близько 1520–1580 років), бароко чи паладіанський рух XVII століття, математика майже не відігравала ролі. Натомість революційні тенденції початку XX століття, наприклад футуризм чи конструктивізм, активно відкидали старі традиції, широко використовували математичні ідеї та сприяли формуванню модерністської архітектури. Наприкінці XX століття архітектори також швидко почали застосовувати фрактальну геометрію та аперіодичні мозаїки для створення оригінальних та привабливих фасадів. Фрактал – це складна фігура або форма, яка складається з простих частин і повторює сама себе на різних масштабах. Термін фрактал запровадив у 1975 році французький математик Бенуа Мандельброт у своїй книжці «Фрактали: випадок, форма, розмірність». Фрактальна геометрія описує форми, що складаються з подібних елементів різного масштабу. Такі структури можна кількісно охарактеризувати за допомогою фрактальної розмірності (рис. 2):

$$N = r^D. \quad \Rightarrow \quad D = \frac{\log(N)}{\log(1/r)}, \tag{2}$$

де D – фрактальна розмірність, N – кількість копій, на які масштабується об’єкт, r – коефіцієнт масштабування.

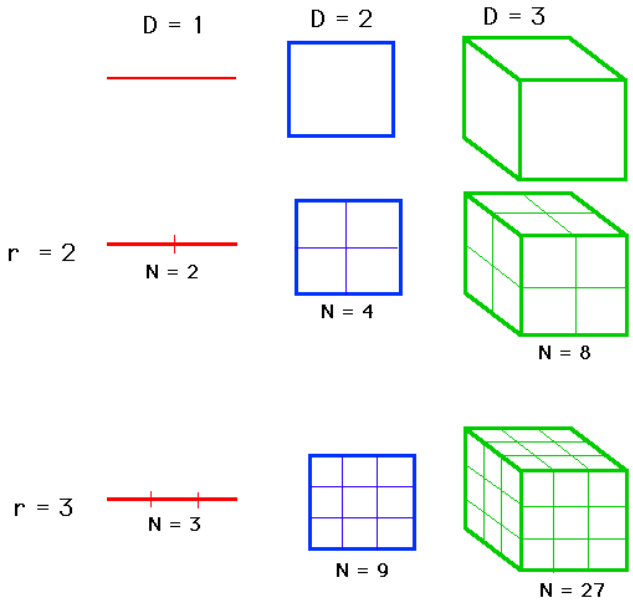

Рис. 2 – Зображення виміру Гаусдорфа

Сніжинка Коха (рис. 3) – це фрактальна фігура, яку будують крок за кроком, починаючи з трикутника [9]. На кожному наступному етапі кожен відрізок замінюють чотирма меншими відрізками, які утворюють маленький трикутний «виступ». Щоразу, коли додаються такі трикутники, загальна довжина межі фігури збільшується приблизно на третину. Тому зі збільшенням кількості етапів периметр сніжинки безмежно зростає і прямує до нескінченності. Водночас площа цієї фігури збільшується не безмежно, а лише до певного граничного значення, тобто залишається скінченною.

Крива Коха (рис. 4) – це одномірний фрактал, тобто безпосередньо сама крива, яка утворюється додаванням «трикутних виступів» на відрізку. Вона має нескінченну довжину, але обмежену площу (0 для кривої). Крива Коха (сніжинка Коха) цікава тим, що ніде не має дотичних, тобто ніде не диференційовна, хоча всюди неперервна.

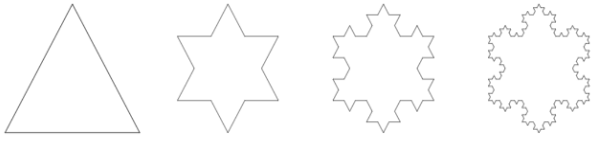

Рис. 3 – Сніжинка Коха

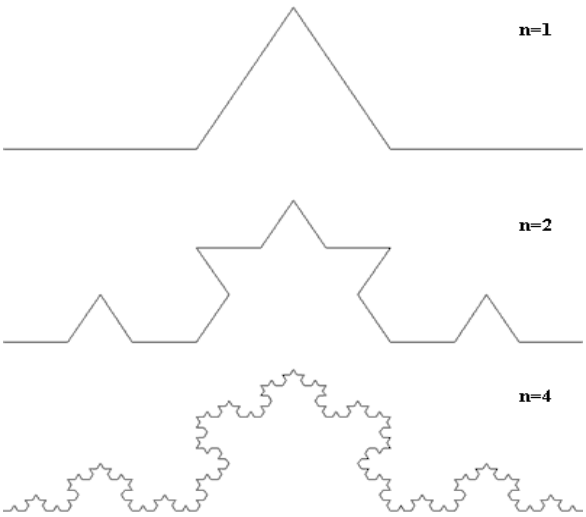

Рис. 4 – Крива Коха

Якщо взяти об'єкт, що знаходиться в евклідовому розмірі D, і зменшити його лінійний розмір на $1/r$ у кожному просторовому напрямку, його міра (довжина, площа, або об'єм) збільшується до N, обчисленого за формулою (2), помноженого на оригінал. Використання таких структур у фасадах дозволяє поєднувати складність форми з цілісністю композиції.

Архітектори застосовують математику з кількох причин, часто не враховуючи її роль у будівництві. Насамперед геометрія допомагає визначити просторову форму споруди. Крім того, математичні принципи використовують для створення форм, які сприймаються як гармонійні чи естетично привабливі. Ще з часів піфагорійців, які трактували числа як духовні категорії, архітектори Стародавньої Греції (рис. 5), Риму (рис. 6), ісламського світу (рис. 7) та Італійського Відродження обирали пропорції будівель відповідно до математичних, естетичних або навіть релігійних норм. Також використовують математичні об'єкти, наприклад мозаїки, для декоративного оформлення.

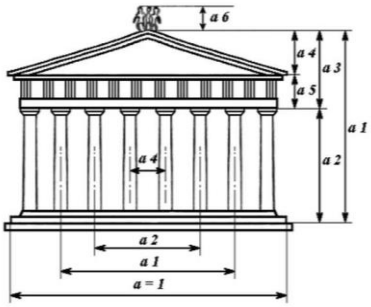

Рис. 5 – Давньогрецький храм Парфенон присвячений Афіні

Рис. 6 – Темп'єтто, храмик-ротонда у дворику монастиря Сан П'єтро ін Монторіо, Рим

Рис. 7 – Внутрішній вигляд купола мечеті Сулеманіє в Стамбулі

У сучасній архітектурі математика набуває ще більшого значення завдяки технологіям: параметричний дизайн, комп'ютерне 3D-моделювання, оптимізація форм, моделювання простору і світла. Геометричні принципи + алгоритми + модельні розрахунки дозволяють створювати складні, нестандартні, але водночас міцні, функціональні, естетичні споруди. У параметричному проєктуванні геометрія будівлі задається системою параметричних рівнянь x=f(t), y=g(t), z=h(t) де зміна параметра t призводить до контрольованої трансформації форми. Це дозволяє оптимізувати конструкцію з точки зору міцності, матеріаломісткості та естетики. Завдяки цьому архітектура як професія та мистецтво отримала нові можливості: криволінійні фасади, органічні форми, складні просторові рішення, інноваційні конструкції.

Висновок

Математика – це невід'ємна та фундаментальна складова архітектури. Через геометрію, пропорції, моделювання вона дає змогу поєднати красу й функціональність, естетику й надійність. Архітектура без математики – або хаос форм без логіки, або прості конструкції без гармонії. Історичні приклади демонструють, що математичні знання дозволяли створювати простір як організовану, цілісну, гармонійну систему. А сучасні технології – параметричний дизайн, 3D-моделювання, оптимізація форм – розширюють ці можливості, відкриваючи шлях до нових форм, структур, просторів. Тому для архітектора, як художника та інженера, знання вищої математики є не розкішшю, а необхідністю.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Arnold, F. Mathematics and the Islamic Architecture of Córdoba. Arts 2018, 7, 35. https://doi.org/10.3390/arts7030035
2. Mathematics and Architecture – HiSoUR [Електронний ресурс] : [Веб-сайт]. – Режим доступу: https://www.hisour.com/data/mathematics-and-architecture/.
3. Mathematics in Architecture [Електронний ресурс] : [Веб-сайт]. – Режим доступу: https://kdietrich.com/thesis/d9a-research/section%206%20mathematics/Mathematics.htm.
4. Geometry and Architecture: How Mathematics Helps in Design. Montessori Center International [Електронний ресурс] : [Веб-сайт]. – Режим доступу: https://interschool.online/en/helpful-articles/geometry-and-architecture-how-mathematics-helps-in-design/.
5. Venetis, John. (2020). The Role of Mathematics in Architecture and Fine Arts: A Historical Overview, Problems and Prospects. Civil Engineering and Architecture. 8. 10.13189/cea.2020.080308.
6. Architecture, Patterns, and Mathematics [Електронний ресурс] : [Веб-сайт]. – Режим доступу: https://patterns.architexturez.net/doc/az-cf-172620.
7. Добранюк Ю. В. Застосування СКМ Maple для побудови 2D області в задачі обчислення площі фігури, обмеженої віссю ординат та кубічними функціями синуса та косинуса [Електронний ресурс] / Ю. В. Добранюк, А. Б. Кукленко, А. В Лихогляд // Матеріали IV Міжнародної науково-методичної Інтернет-конференції «Проблеми вищої математичної освіти: виклики сучасності», Вінниця, 20-22 червня 2024 р. – 5 с. – Електрон. текст. дані. – 2024. – Режим доступу: https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/pmovc/pmovc24/paper/viewFile/21371/17697

8. Добранюк Ю. В. Застосування СКМ Maple для побудови 2D області в задачі обчислення площі фігури, обмеженої параболою та лінією / Ю. В. Добранюк, А. В Лихогляд, А. Б. Кукленко, Я. О. Усенко // LIII Всеукраїнська науково-технічна конференція факультету інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії (2024) : Вінниця, ВНТУ, 20-22 березня 2024 р. – 5 с. – Електрон. текст. дані. – 2024. – Режим доступу: https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/all-fitki/all-fitki-2024/paper/view/20849/17278.

9. Wolfram mathworld. Koch Snowflake [Електронний ресурс] : [Веб-сайт]. – Режим доступу: https://mathworld.wolfram.com/KochSnowflake.html.

Краєвська Руслана Русланівна – студентка групи 1АМ-25Б, факультет будівництва, цивільної та екологічної інженерії, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: ruslana1859@gmail.com

Галяновська Вікторія Олегівна — студентка групи БМ-24б, факультет будівництва, цивільної та екологічної інженерії, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: viktoriya.halyanovska@gmail.com.

Добранюк Юрій Володимирович — кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: dobranyuk@vntu.edu.ua.

Ruslana Kraievska – student of group 1AM-25B, Faculty of Construction, Civil and Environmental Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: ruslana1859@gmail.com

Galyanovska Viktoria O. – student of group BM-24b, Faculty of Civil and Environmental Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, email : viktoriya.halyanovska@gmail.com.

Dobranyuk Yuriy V. – Ph.D., Associate Professor of Department of Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: dobranyuk@vntu.edu.ua.