

МАТЕМАТИЧНА ДЕРЕВОПОДІБНА МОДЕЛЬ ХМАРНИХ ОБЧИСЛЕНЬ ДЛЯ БІЛІНГОВИХ СИСТЕМ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі синтезовано математичний апарат для моделювання ієрархічних зв'язків у хмарних білінгових архітектурах. Розроблено метод трансформації динамічних графів у статичні об'єкти реляційної алгебри, що дозволяє мінімізувати обчислювальну ентропію та усунути деградацію продуктивності, характерну для рекурсивних запитів. Математичне обґрунтування заміни ітераційних процедур на операції над типізованими векторами та масивами композитних типів забезпечує теоретичну базу для побудови високонавантажених систем із прогнозованим часом відгуку. Запропонований підхід дозволяє перетворити складність обходу дерева на логарифмічний пошук у просторі денормалізованих правил, що робить відкриті СУБД конкурентоспроможними відносно пропрієтарних рішень у фінансовому секторі.

Ключові слова: PostgreSQL, Microsoft SQL Server, хмарні обчислення, білінгові системи, комп'ютерні науки, математичне моделювання, теорія графів, реляційна алгебра, векторизація умов, обчислювальна складність, денормалізація, композитні типи, масиви даних, теорія множин, орієнтований ациклічний граф, високонавантажені інформаційні системи.

Abstract

The work synthesizes a mathematical apparatus for modeling hierarchical relationships in cloud billing architectures. A method for transforming dynamic graphs into static relational algebra objects has been developed, minimizing computational entropy and eliminating performance degradation typical of recursive queries. The mathematical justification for replacing iterative procedures with operations on typed vectors and composite type arrays provides a theoretical basis for constructing high-load systems with predictable response times. The proposed approach transforms tree traversal complexity into a logarithmic search within a denormalized rule space, making open-source RDBMS competitive with proprietary solutions in the financial sector.

Keywords: PostgreSQL, Microsoft SQL Server, cloud computing, billing systems, computer science, mathematical modeling, graph theory, relational algebra, condition vectorization, computational complexity, denormalization, composite types, data arrays, set theory, directed acyclic graph, high-load information systems.

Ефективність функціонування сучасних фінансових платформ безпосередньо залежить від здатності систем керування базами даних оперативно опрацьовувати великі масиви транзакційних даних. Використання деревоподібних структур для моделювання тарифних сіток дозволяє гнучко налаштовувати умови через механізми успадкування. Проте при масштабуванні систем PostgreSQL демонструє суттєву деградацію продуктивності при ітераційних обчисленнях.

Фундаментальною основою дослідження є представлення ієрархії ставок як орієнтованого ациклічного графа:

$$G = (V, E),$$

де V – множина логічних правил,

E – відношення часткового порядку, що визначає спадкування.

Для кожної транзакції T необхідно знайти шлях:

$$L = \{v_1, v_2, \dots, v_k\},$$

де кожен вузол v_i задовольняє набору предикатів.

Рекурсивна модель обробки масиву транзакцій N має часову складність $O(N \cdot d)$, де d — діаметр графа (глибина ієрархії).

У вигляді сімейства підмножин структура ієрархії може бути представлена як:

$$S \in U,$$

де U — універсальна множина параметрів.

Кожному вузлу $v \in V$ відповідає кортеж локальних умов $C_v = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, що визначають обмеження на атрибути транзакції на даному рівні. Процес трансформації передбачає побудову відображення графа у простір денормалізованих векторів R , де кожен вектор $vec\{r\}_j$ відповідає конкретній гілці j і є результатом об'єднання кортежів обмежень уздовж шляху L_j :

$$vec\{r\}_j = \bigcup_{\{v \in L_j\}} C_v$$

З точки зору булевої логіки, відповідність транзакції $\{X\} = \{x_1, \dots, x_n\}$ правилу r_j формалізується як кон'юнкція предикатів:

$$f(\{X\}, \{r\}_j) = \bigwedge_{\{i,j=1\}}^{\{n,m\}} (x_i \in D_{\{j,i\}} \vee D_{\{j,i\}} = \emptyset)$$

де $D_{j,i}$ — результуюча область допустимих значень для i -го параметра у j -му правилі, а $\emptyset$ позначає відсутність обмеження. Логічний вивід у системі трансформується з динамічного обчислення $P_{L_j}(x) = \bigwedge_{v \in L_j} P_v(x)$ статичну перевірку вектора, де $P_{L_j}(x)$ — результуючий предикат шляху. Це підсумкова логічна функція для конкретного шляху L в ієрархії. Вона визначає, чи є даний шлях (гілка дерева) істинним для вхідних даних x . Якщо $P_{L_j}(x) = 1$ (істина), то ставка або правило, що знаходиться в кінці цього шляху, може бути застосована до транзакції.

Сутність моделі полягає у векторизації умов за допомогою композитних типів *langle op, val*, що дозволяє трактувати кожен гілку як атомарну точку у багатовимірному просторі ознак. Після згортання ієрархії складність знаходження оптимального правила для транзакції визначається не глибиною дерева d , а потужністю множини гілок M . При використанні збалансованих структур (B-tree) сумарна складність становить:

$$Complexity_{new} = O(N \cdot \log M)$$

Порівняно з рекурсивною складністю $Complexity_{old} = O(N \cdot d)$, новий підхід забезпечує константну складність $O(1)$ відносно глибини ієрархії d , оскільки всі рівні вкладеності інтегровані в єдиний вектор. Операція зіставлення транзакції T із множиною правил обмежень R реалізується через реляційну операцію з'єднання:

$$S = \sigma_{match}(T \bowtie R)$$

де σ_{match} — селекція за вектором консолідованих умов.

Синтез математичної моделі на основі теорій графів та множин і методів векторизації дозволяє детермінувати обчислювальні витрати. Перехід до статичних векторів предикатів нівелює накладні витрати на управління стеком рекурсії. Це забезпечує математичну стійкість алгоритму до ускладнення топології тарифних сіток і дозволяє використовувати PostgreSQL у високонавантажених білінгових системах із гарантованим часом відгуку, незалежно від розгалуженості вихідного графа правил.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Іванчук Я.В., Яковчук П.Л. Балансування навантаження комп'ютерної мережі // Електронні інформаційні ресурси: створення, використання, доступ та управління: збірник матеріалів Міжнародної науково-практичної Інтернет-конференції (Суми/Вінниця, 20-21 листопада 2024 р.). – Суми/Вінниця: НІКО / КЗВО «Вінницька академія безперервної освіти», 2024. – С. 64-65.
2. Microsoft SQL Server Documentation. Recursive Queries Using Common Table Expressions. 2024. URL: <https://learn.microsoft.com/en-us/sql/t-sql/queries/with-common-table-expression-transact-sql>
3. POSTGRESQL Documentation. 16.2024. URL: <https://www.postgresql.org/docs/16/index.html>

Науковий керівник – Іванчук Ярослав Володимирович, д.т.н., професор, професор кафедри комп'ютерних наук, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, ivanchuck@vntu.edu.ua

Яковчук Павло Леонідович, група 123а, Факультет інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації

Scientific Supervisor –Yaroslav Ivanchuk, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Computer Science, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, ivanchuck@vntu.edu.ua

Pavlo Yakovchuk, group 123a, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia. Faculty of Intelligent Information Technologies and Automation pyakovchuk@gmail.com