УДК 681.142.2

О. В. Гладківська, к. ф.-м. н.

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ДЛЯ МОДЕЛІ РОЗВИТКУ РОСЛИНИ

У дослідженні описано модель розвитку рослини з використанням інтегральних динамічних моделей В. М. Глушкова (на прикладі цукрового буряка). Дається постановка задачі ідентифікації характеристик моделі, фізичний зміст яких – показники ефективності розвитку рослини, та алгоритм її розв'язання. Використовується метод найменших квадратів та один із методів нелінійного програмування.

Вступ

Аналіз останніх досліджень

Зараз, в час інтенсивного розвитку комп'ютерних технічних засобів та програмного забезпечення, головним засобом теоретичних і прикладних досліджень стають комп'ютерно-орієнтовані методи моделювання складних проблем. Важливий клас таких проблем становлять більшість задач, що вирішуються для еволюційних систем. Еволюційні системи пов'язані з економічними системами як в цілому, так і окремими галузями і бізнес-структурами, наукою, культурою, екологічними системами, популяціями, окремими різновидами тварин і рослин, громадськими організаціями, різними підсистемами організмів тощо. При моделюванні складних систем, що розвиваються, особливо економічних, технічних, біологічних, екологічних та інших, широке застосування знайшов клас інтегральних динамічних моделей, розроблений академіком В. М. Глушковим та його учнями. Цей математичний апарат найдетальніше висвітлений в монографіях [1, 2], а також в статтях [3, 4] та ін. В цих роботах, поруч з аналізом сучасних засобів, пропонується та обґрунтовується новий клас математичних моделей, що можуть бути застосовані в моделюванні для особливо складних випадків. Головною особливістю таких математичних моделей є можливість опису еволюційних систем, процесів створення, відновлення та динаміки розповсюдження ресурсів для виконання внутрішніх і зовнішніх функцій системи та ін. Розглядається як теорія, так і застосування математичних моделей. Застосування головним чином стосується економіки, біології, імунології та охорони здоров'я.

Невирішені частини загальної проблеми

Питання побудови математичних моделей різних процесів та об'єктів тісно пов'язані з актуальними задачами ідентифікації як задачами визначення (оцінювання) параметрів і структури об'єктів за результатами експериментальних досліджень. Застосування інтегральних динамічних моделей до систем, що розвиваються, показало, що в розглядуваному класі моделей важливу роль відіграють показники ефективності функціонування системи, яку моделюють. З математичної точки зору ці показники є ядром інтегрального рівняння. Отримуючи важливі результати аналітичного та числового розв'язку інтегральних рівнянь, а також задач оптимізації, припускають, що такі функції відомі [1—5]. Тому виникла необхідність розв'язання задачі ідентифікації динамічних моделей В. М. Глушкова в плані аналітичного та числового знаходження показників ефективності функціонування системи.

Актуальність дослідження випливає із важливості задач ідентифікації для вказаного класу моделей, які виникають в теорії і практиці моделювання складних систем в багатьох областях діяльності людини. Мета даного дослідження − знаходження деяких параметрів моделі розвитку рослини, описаної, наприклад, в [1, 3] та деталізованої в [5].

Модель розвитку рослини

Модель розвитку рослини (на прикладі цукрового буряка) задається системою рівнянь

$$m_1(t) = \int_{a(t)}^{t} \alpha_{11}(\tau,t)\, y_{11}(\tau)\, m_1(\tau)\, d\tau + \int_{0}^{t} \alpha_{12}(\tau,t)\, y_{12}(\tau)\, m_2(\tau)\, d\tau\,; \qquad (1)$$

$$m_2(t) = \int_{a(t)}^{t} \alpha_{21}(\tau,t)\, y_{21}(\tau)\, m_1(\tau)\, d\tau + \int_{0}^{t} \alpha_{22}(\tau,t)\, y_{22}(\tau)\, m_2(\tau)\, d\tau\,; \qquad (2)$$

$$s(t) = \int_{a(t)}^{t} \alpha_{31}(\tau,t)\, y_{31}(\tau)\, m_1(\tau)\, d\tau + \int_{0}^{t} \alpha_{32}(\tau,t)\, y_{32}(\tau)\, m_2(\tau)\, d\tau\,; \qquad (3)$$

$$c(t) = \int_{a(t)}^{t} \alpha_{41}(\tau,t)\, y_{41}(\tau)\, m_1(\tau)\, d\tau + \int_{0}^{t} \alpha_{42}(\tau,t)\, y_{42}(\tau)\, m_2(\tau)\, d\tau\,; \qquad (4)$$

$$M_1(t) = \int_{a(t)}^{t} m_1(\tau)\, d\tau\,, \quad G(t) = \int_{T_0}^{a(t)} m_1(\tau)\, d\tau\,, \quad \widehat{M}_1(t) = \int_{T_0}^{t} m_1(\tau)\, d\tau\,;$$

$$M_2(t) = \int_{0}^{t} m_2(\tau)\, d\tau\,, \quad S(t) = \int_{0}^{t} s(\tau)\, d\tau\,, \quad C(t) = \int_{0}^{t} c(\tau)\, d\tau\,;$$

$$0 < T_0 \le t \le T\,;\ T_0 \le a(t) < t\,;\ \sum_{i=1}^{4} y_{ij} = 1,\ j = 1,2\,;\ a(t\ ) = \begin{cases} T_0, & \text{якщо } T_0 \le t \le \tilde{T}; \\ a(t), & \text{якщо } \tilde{T} < t \le T. \end{cases}$$

Фізичний зміст функцій такий: $\widehat{M}_1(t) = M_1(t) + G(t)$ — вся біомаса листя в момент часу t ($M_1(t)$ — маса, що функціонує; $G(t)$ — маса застарілого листя); $M_2(t) + S(t)$ — маса кореня ($M_2(t)$ — маса, що функціонує, $S(t)$ — сахароза, маса, що накопичується); $C(t)$ — маса продуктів, що покидають рослину; $m_1(t)$ — швидкість росту кількості маси листя в момент часу t; $m_2(t)$ — швидкість росту кількості маси кореня, що функціонує; $s(t)$ — швидкість росту кількості маси кореня, що накопичується; $c(t)$ — швидкість збільшення кількості продуктів, що покидають рослину; $y_{11}, y_{21}, y_{31}, y_{41}$ — частка біомаси листя, що йде на створення M_1, M_2, S, C відповідно; $y_{12}, y_{22}, y_{32}, y_{42}$ — частка біомаси кореня, що йде на створення M_1, M_2, S, C відповідно; $\alpha_{11}(\tau,t)$ — продуктивність (питома швидкість) росту біомаси листя по каналу $y_{11}m_1 - m_1$, тобто швидкість росту маси листя m_1 в момент часу t в розрахунку на одиницю швидкості росту маси листя $y_{11}m_1$ в момент часу τ; $\alpha_{12}(\tau,t)$, $\alpha_{21}(\tau,t)$, $\alpha_{22}(\tau,t)$, $\alpha_{31}(\tau,t)$, $\alpha_{32}(\tau,t)$, $\alpha_{41}(\tau,t)$, $\alpha_{42}(\tau,t)$ — продуктивності по каналах $y_{12}m_2 - m_1$, $y_{21}m_1 - m_2$, $y_{22}m_2 - m_2$, $y_{31}m_1 - s$, $y_{32}m_2 - s$, $y_{41}m_1 - c$, $y_{42}m_2 - c$ відповідно; $a(t)$ — часова межа ліквідації застарілого листя; 0 — початковий момент дослідження (момент проростання насіння); T_0 — момент появи листя рослини; $\tilde{T}$ — момент появи застарілого листя; T — кінцевий момент дослідження (кінець вегетаційного періоду).

Постановка задачі ідентифікації

В даному дослідженні розглядається така задача ідентифікації для описаної моделі розвитку рослини. Нехай на проміжку часу $[T_0, T]$ задано значення функцій $M_{1i}(t)$, $S_i(t)$, $C_i(t)$, $G_i(t)$; а на проміжку $[0, T]$ — функції $M_{2i}(t)$, $i = \overline{1, R}$, де i – номер досліджуваного об'єкта. В зв'язку з тим, що протягом вегетаційного періоду $[0, T]$ серію експериментальних даних для однієї рослини можна отримати тільки один раз, будемо досліджувати R об'єктів, вважаючи їх ідентичними. Треба знайти функції $\alpha_{11}(\tau, t)$, $\alpha_{12}(\tau, t)$, $\alpha_{21}(\tau, t)$, $\alpha_{22}(\tau, t)$, $\alpha_{31}(\tau, t)$, $\alpha_{32}(\tau, t)$, $\alpha_{41}(\tau, t)$, $\alpha_{42}(\tau, t)$.

Для знаходження функцій $\alpha_{11}(\tau, t)$, $\alpha_{12}(\tau, t)$ використовуємо відомий критерій оцінювання — оцінку математичного очікування квадрату різниці лівої та правої частин рівняння (1) моделі (аналогічно для функцій $\alpha_{21}(\tau, t)$, $\alpha_{22}(\tau, t)$ — рівняння (2), для функцій $\alpha_{31}(\tau, t)$, $\alpha_{32}(\tau, t)$ — рівняння (3), для функцій $\alpha_{41}(\tau, t)$, $\alpha_{42}(\tau, t)$ — рівняння (4)). Будемо визначати показники ефективності $\alpha_{11}(\tau, t)$, $\alpha_{12}(\tau, t)$, інші знаходяться аналогічно.

Задача ідентифікації полягає в знаходженні $\alpha_{11}(\tau, t)$, $\alpha_{12}(\tau, t)$ шляхом мінімізації критерію оцінювання

$$I(\alpha_{11}, \alpha_{12}; t) = M^* \left[m_1(t) - \int_{a(t)}^{t} \alpha_{11}(\tau, t)\, y_{11}(\tau)\, m_1(\tau)\, d\tau - \int_{0}^{t} \alpha_{12}(\tau, t)\, y_{12}(\tau)\, m_2(\tau)\, d\tau \right]^2,$$

де M^* — знак оцінки математичного очікування.

Розв'язання задачі ідентифікації

Виходячи із можливостей застосування апріорної інформації та враховуючи факт, що математичне очікування у нестаціонарному випадку знаходиться як середнє сукупності реалізацій (у нашому випадку — R ідентичних об'єктів, для яких наявні вхідні дані), критерій оцінювання записуємо у такому вигляді:

$$I(\alpha_{11}, \alpha_{12}; t) = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^{R} \left[m_{1i}(t) - \int_{a_i(t)}^{t} \alpha_{11}(\tau, t)\, y_{11}(\tau)\, m_{1i}(\tau)\, d\tau - \int_{0}^{t} \alpha_{12}(\tau, t)\, y_{12}(\tau)\, m_{2i}(\tau)\, d\tau \right]^2. \quad (5)$$

Таким чином, дослідження зводиться до знаходження мінімуму критерію (5) на заданому класі функцій $\alpha_{11}(\tau, t)$, $\alpha_{12}(\tau, t)$.

Враховуючи властивості об'єкта моделювання, невідомі характеристики $\alpha_{11}(\tau, t)$, $\alpha_{12}(\tau, t)$ як показники продуктивності вибрано у вигляді типових для біології нелінійних функцій, що спочатку зростають, а потім спадають. Знайдемо розв'язок поставленої задачі ідентифікації для моделі розвитку рослини у двох випадках. У першому випадку виберемо $\alpha_{11}(\tau, t)$, $\alpha_{12}(\tau, t)$ таким чином [1, 3]:

$$\alpha_{11}(\tau, t) = \alpha_1^0 \frac{m_1(\tau)\, e^{d_1(\tau - t) - d_2(\tau - t)^2}}{M_1(\tau)\, y_{11}(\tau)}; \quad \alpha_{12}(\tau, t) = \alpha_2^0 \frac{m_2(\tau)\, e^{d_3(\tau - t)}}{M_2(\tau)\, y_{12}(\tau)}; \quad (6)$$

у другому – у вигляді [5]

$$\alpha_{11}(\tau, t) = \alpha_1^0 \frac{e^{d_1(\tau - t) - d_2(\tau - t)^2}}{y_{11}(\tau)}; \quad \alpha_{12}(\tau, t) = \alpha_2^0 \frac{e^{d_3(\tau - t)}}{y_{12}(\tau)}. \quad (7)$$

Фізичний зміст невідомих параметрів у виразах (6), (7) такий: α_1^0, α_2^0 — константи питомих швидкостей росту; d_1, d_2, d_3 — показники зносу біомаси в момент $\tau \le t$, причому коефіцієнт d_2 враховує зростання зносу залежно від зростання часу t.

Враховуючи (6), (7), отримуємо такі задачі ідентифікації:

$$\begin{aligned} I(\alpha_1^0, \alpha_2^0, d_1, d_2, d_3;\ t) = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^{R} \Bigg[& m_{1i}(t) - \alpha_1^0 \int_{a_i(t)}^{t} \frac{1}{M_{1i}(\tau)}\, m_{1i}^2(\tau)\, e^{d_1(\tau - t) - d_2(\tau - t)^2}\, d\tau - \\ & - \alpha_2^0 \int_{0}^{t} \frac{1}{M_{2i}(\tau)}\, m_{2i}^2(\tau)\, e^{d_3(\tau - t)}\, d\tau \Bigg]^2 \to \min_{\alpha_1^0, \alpha_2^0, d_1, d_2, d_3}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$I(\alpha_1^0, \alpha_2^0, d_1, d_2, d_3; t) = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R}\left[m_{1i}(t) - \alpha_1^0 \int_{a_i(t)}^{t} m_{1i}^2(\tau)\, e^{d_1(\tau-t)-d_2(\tau-t)^2}\, d\tau - \right. \\ \left. - \alpha_2^0 \int_0^t m_{2i}^2(\tau) e^{d_3(\tau-t)} d\tau\right]^2 \to \min_{\alpha_1^0, \alpha_2^0, d_1, d_2, d_3}. \quad (9)$$

Вважаємо, що значення функцій $m_{1i}(t)$, $M_{1i}(t)$, $a_i(t)$, $t \cdot \in [T_0, T]$; $m_{2i}(t)$, $M_{2i}(t)$, $i = \overline{1, R}$, $t \in [0, T]$ задано. Слід зазначити, що функції $m_{1i}(t)$, $m_{2i}(t)$, $a_i(t)$ легко знайти із допоміжних рівнянь моделі, остаточні формули такі:

$$m_1(t) = \frac{dM_1}{dt} + \frac{dG}{dt}; \quad m_2(t) = \frac{dM_2}{dt}; \quad G(t) = \widehat{M}_1(a(t)).$$

Розглянемо застосування методу найменших квадратів [6] для знаходження коефіцієнтів α_1^0, α_2^0, що лінійно входять у вирази (6), (7) для характеристик моделі $\alpha_{11}(\tau, t)$, $\alpha_{12}(\tau, t)$.

Перепишемо задачі (8), (9) у вигляді

$$I = I(\alpha_1^0, \alpha_2^0, d_1, d_2, d_3; t) = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R}\left[m_{1i}(t) - \alpha_1^0\, \varphi_{1i}(t) - \alpha_2^0\, \varphi_{2i}(t)\right]^2, \quad (10)$$

де для (8) функції $\varphi_{1i}(t)$, $\varphi_{2i}(t)$ мають вигляд

$$\varphi_{1i}(t) = \begin{cases} \int_{T_0}^{t} \frac{1}{M_{1i}(\tau)} m_{1i}^2(\tau)\, e^{d_1(\tau-t)-d_2(\tau-t)^2}\, d\tau, & \text{якщо } T_0 \le t \le \tilde{T}; \\ \int_{a(t)}^{t} \frac{1}{M_{1i}(\tau)} m_{1i}^2(\tau)\, e^{d_1(\tau-t)-d_2(\tau-t)^2}\, d\tau, & \text{якщо } \tilde{T} < t \le T; \end{cases}$$

$$\varphi_{2i}(t) = \int_0^t \frac{1}{M_{2i}(\tau)} m_{2i}^2(\tau)\, e^{d_3(\tau-t)}\, d\tau; \quad i = \overline{1, R};$$

а у випадку (9) – вигляд

$$\varphi_{1i}(t) = \begin{cases} \int_{T_0}^{t} m_{1i}(\tau)\, e^{d_1(\tau-t)-d_2(\tau-t)^2}\, d\tau, & \text{якщо } T_0 \le t \le \tilde{T}; \\ \int_{a(t)}^{t} m_{1i}(\tau)\, e^{d_1(\tau-t)-d_2(\tau-t)^2}\, d\tau, & \text{якщо } \tilde{T} < t \le T; \end{cases}$$

$$\varphi_{2i}(t) = \int_0^t m_{2i}(\tau)\, e^{d_3(\tau-t)}\, d\tau; \quad i = \overline{1, R}.$$

Введемо позначення

$$a_{lk}(t) = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R} \varphi_{li}(t)\, \varphi_{ki}(t); \quad b_k(t) = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R} m_{1i}(t)\, \varphi_{ki}(t); \quad l, k = 1, 2; \quad b_3(t) = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R} {m_{1i}}^2(t);$$

та перепишемо критерій (10) у вигляді

$$I = I(\alpha_1^0, \alpha_2^0, d_1, d_2, d_3; t) = \\ = b_3(t) - 2\,\alpha_1^0\, b_1(t) - 2\,\alpha_2^0\, b_2(t) + \left(\alpha_1^0\right)^2 a_{11}(t) + 2\,\alpha_1^0\,\alpha_2^0\, a_{12}(t) + \left(\alpha_2^0\right)^2 a_{22}(t). \quad (11)$$

Застосувавши до співвідношення (11) метод найменших квадратів, одержуємо таку систему рівнянь для знаходження α_1^0, α_2^0:

$$\begin{cases} b_1(t) - \alpha_1^0 \ a_{11}(t) - \alpha_2^0 \ a_{12}(t) = 0; \\ b_2(t) - \alpha_1^0 \ a_{12}(t) - \alpha_2^0 \ a_{22}(t) = 0, \end{cases}$$

а також формули для обчислення α_1^0, α_2^0 та критерію оцінювання (11) (для кожного $t \in [T_0, T]$):

$$\alpha_1^0 = \frac{b_1(t) \ a_{22}(t) - b_2(t) \ a_{12}(t)}{a_{11}(t) \ a_{22}(t) - a_{12}{}^2(t)};$$

$$\alpha_2^0 = \frac{b_2(t) \ a_{11}(t) - b_1(t) \ a_{12}(t)}{a_{11}(t) \ a_{22}(t) - a_{12}{}^2(t)};$$

$$I = b_3(t) - \alpha_1^0 \ b_1(t) - \alpha_2^0 \ b_2(t).$$

Якщо параметри α_1^0, α_2^0, обчислені методом найменших квадратів, не відповідають обмеженням виду

$$0 \le \alpha_1^0, \ \ \alpha_2^0 \le x, \tag{12}$$

то для розв'язання задачі ідентифікації пропонується застосувати один із методів нелінійного програмування — метод Хілдрета і Д'Езопо [7]. Цей метод вибрано через простоту окремих кроків ітераційного процесу.

Розглянемо задачу

$$\min\left\{p^T \alpha + \alpha^T pC\alpha / A\alpha \le b\right\}, \tag{13}$$

де $A = \left\| a_{ij} \right\|$ — матриця розмірністю $[m \times n]$, $C = \left\| c_{ij} \right\|$ — симетрична додатна матриця розмірністю $[n \times n]$, α — вектор-стовпець із n елементів, b — вектор-стовпець із m елементів, p^T — вектор-рядок із n елементів. Її розв'язок має вигляд [7]:

$$\alpha = -\frac{1}{2} C^{-1} \left(A^T \hat{u} + p \right),$$

де $\hat{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_m)^T$ — вектор-рядок, елементи якого обчислюються в результаті збіжного ітераційного процесу $\left\{ u_1^{(l+1)}, u_2^{(l+1)}, \ldots, u_m^{(l+1)} \right\}$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, за формулами

$$u_i^{(0)} = 0\ ; \ \ u_i^{(l+1)} = \max\left\{0, w_i^{(l+1)}\right\}; \quad w_i^{(l+1)} = -\frac{1}{g_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} g_{ij} \cdot u_j^{(l+1)} + \frac{h_i}{2} + \sum_{j=i+1}^{m} g_{ij} \cdot u_j^{(l)} \right);$$
$$i = \overline{1, m}\ ; \ \ l = 0, 1, 2, \ldots,$$

де g_{ij} — елементи матриці $G = -\frac{1}{4} A C^{-1} A^T$; h_i — елементи вектора-стовпця $h = \frac{1}{2} ACp + b$; $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, m}$.

Сформулюємо задачу ідентифікації (11), (12) у вигляді (13). Необхідно мінімізувати квадратичну форму

$$I = b_3(t) - 2\ \alpha_1^0 b_1(t) - 2\ \alpha_2^0 b_2(t) + \left(\alpha_1^0\right)^2 a_{11}(t) + 2\ \alpha_1^0 \alpha_2^0\ a_{12}(t) + \left(\alpha_2^0\right)^2 a_{22}(t),$$

якщо задано такі обмеження:

$$\begin{cases} 1\cdot\alpha_1^0 + 0\cdot\alpha_2^0 \le x; \\ 0\cdot\alpha_1^0 + 1\cdot\alpha_2^0 \le x; \\ -\alpha_1^0 + 0\cdot\alpha_2^0 \le 0; \\ 0\cdot\alpha_1^0 - 1\cdot\alpha_2^0 \le 0. \end{cases}$$

Запишемо всі дані у вигляді (13), тоді

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 \\ \alpha_2^0 \end{pmatrix}; \; p = \begin{pmatrix} -2b_1 \\ -2b_2 \end{pmatrix}; \; C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}; \; A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \; b = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, матриця C – симетрична. В роботі [5] доведено, що вона додатна.

Після необхідних обчислень та позначень одержуємо вектор-стовпець h та матрицю G:

$$h = \begin{pmatrix} -b_4/b_6 + x \\ b_5/b_6 + x \\ b_4/b_6 \\ -b_5/b_6 \end{pmatrix}; \; G = \frac{1}{4b_6}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} & -a_{22} & a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} & a_{12} & -a_{11} \\ -a_{22} & a_{12} & a_{22} & -a_{12} \\ a_{12} & -a_{11} & -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix},$$

де $b_4 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$; $b_5 = b_1a_{12} - b_2a_{11}$; $b_6 = a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2$; а також елементи вектора $\hat{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$, які обчислюються в результаті такого ітераційного процесу:

$$u_1^{(0)} = u_2^{(0)} = u_3^{(0)} = u_4^{(0)} = 0\,;$$

$$u_1^{(l+1)} = \max\left\{0, w_1^{(l+1)}\right\}, \; w_1^{(l+1)} = \frac{2}{a_{22}}\left(b_4 - xb_6\right) + \frac{a_{12}}{a_{22}}u_2^{(l)} + u_3^{(l)} - \frac{a_{12}}{a_{22}}u_4^{(l)}\,;$$

$$u_2^{(l+1)} = \max\left\{0, w_2^{(l+1)}\right\}, \; w_2^{(l+1)} = \frac{a_{12}}{a_{11}}u_1^{(l+1)} - \frac{2}{a_{11}}\left(b_5 + xb_6\right) - \frac{a_{12}}{a_{11}}u_3^{(l)} + u_4^{(l)}\,;$$

$$u_3^{(l+1)} = \max\left\{0, w_3^{(l+1)}\right\}, \; w_1^{(l+1)} = u_1^{(l+1)} - \frac{a_{12}}{a_{22}}u_2^{(l+1)} - \frac{2b_4}{a_{22}} + \frac{a_{12}}{a_{22}}u_4^{(l)}\,;$$

$$u_4^{(l+1)} = \max\left\{0, w_4^{(l+1)}\right\}, \; w_4^{(l+1)} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}u_1^{(l+1)} + u_2^{(l+1)} + \frac{a_{12}}{a_{11}}u_3^{(l+1)} + \frac{2b_5}{a_{11}}\,;$$

Остаточні формули для визначення невідомих параметрів α_1^0, α_2^0 мають вигляд (для кожного $t \in [T_0, T]$):

$$\alpha_1^0 = -\frac{1}{2b_6}\left[a_{22}\left(u_1 - u_3 - 2b_1\right) - a_{12}\left(u_2 - u_4 - 2b_2\right)\right];$$

$$\alpha_2^0 = -\frac{1}{2b_6}\left[-a_{12}\left(u_1 - u_3 - 2b_1\right) + a_{11}\left(u_2 - u_4 - 2b_2\right)\right].$$

Розроблено детальний, крок за кроком, алгоритм обчислення параметрів α_1^0, α_2^0, d_1, d_2, d_3; а також відповідне програмне забезпечення, що наведено в [5]. Коефіцієнти d_1, d_2, d_3, які нелінійно входять у вирази для функцій $\alpha_{11}(\tau, t)$, $\alpha_{12}(\tau, t)$, знаходяться методом простого перебору з урахуванням заданих на них обмежень. В розробленому алгоритмі для простоти викладення використано звичайний метод простого перебору параметрів, виходячи із областей їх визначення, заданих початкових значень і приростів

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ на кожній ітерації перебору. Маючи таблицю значень параметрів α_1^0, α_2^0, d_1, d_2, d_3, можна знайти значення невідомих функцій $\alpha_{11}(\tau, t)$, $\alpha_{12}(\tau, t)$ для будь-якого моменту часу.

Висновки

В дослідженні наведено модель розвитку рослини, описану за допомогою динамічних моделей В. М. Глушкова (на прикладі цукрового буряка), дається постановка задачі ідентифікації характеристик моделі $\alpha_{11}(\tau, t)$, $\alpha_{12}(\tau, t)$, $\alpha_{21}(\tau, t)$, $\alpha_{22}(\tau, t)$, $\alpha_{31}(\tau, t)$, $\alpha_{32}(\tau, t)$, $\alpha_{41}(\tau, t)$, $\alpha_{42}(\tau, t)$, фізичний зміст яких − показники ефективності розвитку рослини, та алгоритм її розв'язання. Використовується метод найменших квадратів та один із методів нелінійного програмування.

Одержано числові значення невідомих параметрів моделі розвитку рослини для двох випадків вибору шуканих характеристик (на прикладі функцій $\alpha_{11}(\tau, t)$, $\alpha_{12}(\tau, t)$). Результати, що одержані для $0 \le \alpha_1^0, \alpha_2^0 \le 0,2$; $0 \le d_1, d_3 \le 0,1$; $0 \le d_2 \le 0,5$; $\Delta_1 = \Delta_3 = 0,001$; $\Delta_2 = 0,0001$, показали, що відносна похибка для критерію оцінювання не перевищує числа $\varepsilon = 10^{-2}$, тобто $\frac{I_{\min}}{I_0} \le 10^{-2}$. Тут I_0 — значення критерію I за нульових α_1^0, α_2^0, d_1, d_2, d_3; а $I_{\min}$ — мінімальне значення цього критерію.

Одержані результати представляють інтерес в теорії моделювання, оптимізації та ідентифікації складних систем, що розвиваються. Їх також можна використовувати на практиці для прогнозу розвитку рослини з метою поліпшення процесу селекції, для розв'язання задачі максимізації продуктивності рослини та інших. Дослідження у даному напрямку можна продовжити в плані розширення вибору нелінійних функцій $\alpha_{11}(\tau, t)$, $\alpha_{12}(\tau, t)$ та у порівнянні з наведеними результатами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ:

1. Глушков В. М., Иванов В. В., Яненко В. М. Моделирование развивающихся систем. — М.: Наука, 1983. – 352 с.
2. Viktor V. Ivanov. Model Development and Optimization. – Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers, 1999. – 249 p.
3. Глушков В. М., Иванов В. В., Яненко В. М. О новом классе динамических моделей и его приложении в биологии // Кибернетика. I. — 1979. — № 4. — С. 131—139; II. – 1980. — № 4. – С. 116—125; III. – 1981. — № 5. – С. 113—127.
4. Глушков В. М., Иванов В. В., Яценко Ю. П. Аналитическое исследование одного класса динамических моделей // Кибернетика. I. — 1980. — № 2. — С. 1—12; II. — 1982. — № 3. — С. 104—112.
5. Гладкивская О. В. Исследование задач идентификации для одного класса динамических моделей: Автореф. дис.… канд. физ.-мат. наук: 05.13.16 / Киевский гос. университет им. Т. Г. Шевченко. — Киев, 1990. — 15 с.
6. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки результатов. — М.: Физматгиз, 1962. – 352 с.
7. Кюнци Г., Крелле В. Нелинейное программирование. — М.: Сов. радио, 1965. — 303 с.

Матеріали статті рекомендовані до опублікування оргкомітетом VIII Міжнародної конференції «Контроль і управління в складних системах» (КУСС—2005, 24—27.10.2005 р)

Надійшла до редакції 10.11.05
Рекомендована до друку 22.11.05

Гладківська Оксана Василівна — вчений секретар.

Науково-дослідний центр правової інформатики Академії правових наук України