

МАШИНОБУДУВАННЯ І ТРАНСПОРТ

МАШИНОСТРОЕНИЕ И ТРАНСПОРТ

MECHANICAL ENGINEERING AND TRANSPORT

УДК 621.7.011

**К. І. Коцюбівська; В. І. Клочко, д. пед. н., проф.; С. І. Сухоруков, асп.;
А. В. Чубатюк, магістр**

**Е. И. Коцюбивская; В. И. Клочко д. пед. н., проф.; С. И. Сухоруков, асп.;
А. В. Чубатиук, магистр**

**K. Kotsiubivska; V. I. Klochko, Dr. Sc. (Ped.), Prof; S. I. Suhorukov, Post-Graduate;
A. Chubatiuk, M. S.**

АПРОКСИМАЦІЇ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ КУБІЧНИМИ СПЛАЙН-ФУНКЦІЯМИ

АППРОКСИМАЦИИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙН-ФУНКЦИЯМИ

EXPERIMENTAL DATA APPROXIMATION BY CUBIC SPLINE-FUNCTIONS

Розроблено методику апроксимації експериментальних функцій згладжувальними кубічними сплайнами одного аргументу. Експериментальну інформацію одержували шляхом сканування й обробки сканованого зображення вихідної і zdeформованої координатної сітки за допомогою спеціально розробленого програмного модуля.

Разработана методика аппроксимации экспериментальных функций сглаживающими кубическими сплайнами одного аргумента. Экспериментальную информацию получали путем сканирования и обработки сканированного изображения исходной и деформированной координатной сетки при помощи специально разработанного программного модуля.

There had been developed the procedure for experimental functions approximation by one argument smoothing cubic splines. The experimental data were obtained by means of scanning and processing the scanned image of the initial and the deformed coordinate grid with the help of specially developed program module.

Вступ

Використовуючи експериментально-розрахункові методи розв'язування прикладних задач обробки металів тиском, доводиться мати справу з масивами експериментальних даних, від якості обробки яких залежить успіх розв'язання задачі в цілому. Експериментальна інформація завжди містить систематичні похибки, обумовлені методом вимірювання і випадкові похибки, викликані випадковим розсіянням вимірюваних величин. Математична обробка повинна відокремлювати випадкові похибки від досліджуваної залежності. При цьому виходять з того, що досліджувана функція є неперервною і диференційованою, а випадкові похибки не мають такої властивості [1, 2]. Крім вимог точного наближення до об'єктів, які апроксимуються, необхідно забезпечити виконання граничних умов, відомих з теоретичного аналізу процесу (це умови на осі симетрії, на границі пружної і пластичної зон та ін.) [3]. Вперше програмний комплекс з побудови згладжувальних кубічних сплайнів та їх застосування для знаходження кінематики осесиметричної задачі було розроблено в роботах [4, 5].

Мета даної роботи полягає у розробці методу, який дозволить підвищити точність вимірювань координат вузлів zdeформованої ділильної сітки і значно зменшити трудомісткість процесу вимірювання та подальшої апроксимації отриманих експериментальних результатів кубічними сплайн-функціями.

Вступлення

При використанні експериментально-раховних методів рішення прикладних задач обробки металів тиском приходиться мати справу з масивами експериментальних даних, від якості обробки яких залежить успіх рішення задачі в цілому. Експериментальна інформація завжди містить систематичні похибки, обумовлені методом вимірювання і випадкові похибки, викликані випадковим розсіюванням вимірюваних величин. Математична обробка повинна відокремлювати випадкові похибки від досліджуваної залежності. При цьому виходить з того, що досліджувана функція є неперервною і диференційовною, а випадкові похибки таким властивістю не володіють [1, 2]. Крім вимог точного наближення до об'єкта, який апроксимують, необхідно забезпечити виконання граничних умов, відомих з теоретичного аналізу процесу (це умови на осі симетрії, на межі пружної і пластичної зон і т. д.) [3]. Вперше програмний комплекс для побудови згладжуваних кубічних сплайнів і їх застосування для знаходження кінематики осесиметричної задачі був розроблений в роботах [4, 5].

Метою даної роботи є розробка методу, який дозволить підвищити точність вимірювань координат вузлів роздільної сітки і значно зменшити трудомісткість процесу вимірювань і наступної апроксимації отриманих експериментальних результатів кубічними сплайн-функціями.

Introduction

During the application of the experimental and calculating methods for solving the applied tasks of metal processing with pressure, it is necessary to deal with experimental data. The quality of their processing determines the successful solution of the problem on the whole. Experimental data always include systematic errors, determined by the method of measuring and accidental errors, caused by the accidental dispersion of the measured values. Mathematical processing must separate casual errors from the dependence under research. In this case the function under research is assumed to be a continuous and differential one — the property which casual errors do not possess [1, 2]. Apart from the requirement of accurate approximating the object, it is necessary to satisfy the boundary conditions known from the theoretical analysis of the process (the conditions on the axis of symmetry on the boundary between elastic and plastic zones, etc.) [3]. The programming complex for building smoothing cubic splines and their application for finding the kinematics for the axisymmetrical tasks were first described in [4, 5].

The purpose of this work is to develop the method which will enable to increase the accuracy in measuring the coordinates of the deformed grid nodes and to reduce considerably the labor capacity in the measuring process as well as subsequent approximation of the obtained results by cubic spline-functions.

Апроксимація масивів експериментальних даних

В роботі розглядається випадок, що має місце у дослідженні осесиметричних процесів обробки металів тиском, коли як вихідна використовується інформація про спотворення координатних сіток або ліній течії. У цьому випадку експериментальні дані представляють у вигляді таблично заданих масивів поточних (ейлерових) координат z, r від початкових (Лагранжевих) z_0, r_0 і часу t .

Функції ейлерових координат від лагранжевих $z(z_0, r_0, t)$ і $r(z_0, r_0, t)$ можуть бути отримані апроксимацією експериментальних значень $r_{ij}(t)$ і $z_{i,j}(t)$ вимірюваних у вузлах сітки i, j . Однак, розв'язок задачі багатовимірної згладжувального сплайну пов'язаний з цілим рядом труднощів, основними з яких є побудова розв'язків для задач зі складною конфігурацією межі. Тому спочатку кубічними сплайнами апроксимували залежності $z(z_0, r_0 = \text{const}, t = \text{const})$, $r(z_0, r_0 = \text{const}, t = \text{const})$ та ін., що легко диференціюються і які надалі легко використовувати для визначення компонент тензора швидкостей деформацій. В даній роботі для розв'язання поставленої задачі використані згладжувальні кубічні сплайни одного аргументу [6—9]

$$S_i(x) = \sum_{j=0}^3 a_j^i (x - x_i)^j, \quad x \in [x_j, x_{j+1}], \quad i = 1, 2, \dots, n - 1 \dots \quad (1)$$

Критерієм якості апроксимації в цьому випадку є функціонал [9]

$$I(f) = \int_{x_1}^{x_n} |S''(x)|^2 dx + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\rho_i} (f_i - S(x_i))^2, \tag{2}$$

де f_i — значення згладжуваної функції у вузлі (значение сглаживаемой функции в узле; the value of the smoothed in the node function), $\rho_i \geq 0$ — вагові коефіцієнти (весовые коэффициенты; weight factors), $[x_1, x_n]$ — область визначення функції $f(x)$, (область определения функции $f(x)$, domain of the function $f(x)$).

Задача згладжування формулюється у вигляді мінімізації функціонала (2). Структура функціонала (2) забезпечує компроміс між вимогами мінімальної кривизни сплайну $S(x)$ і, одночасно, найменшого відхилення сплайну від заданих експериментальних значень. В більшості випадків ці вимоги є суперечливими, тобто наближення кривої до експериментальних точок збільшує кривизну і навпаки. Необхідне співвідношення між цими вимогами забезпечується вибором вагових коефіцієнтів.

Знаходження коефіцієнтів a_j^i зводиться до розв'язку системи рівнянь з п'ятидіагональною матрицею. Для одержання замкнутої системи рівнянь необхідно задати граничні умови. Застосовувати сплайн-функції у задачах обробки металів тиском зручно тому, що граничні умови часто відомі з постановки задачі.

Наприклад, для осесиметричного пластичного деформування на осі симетрії заготовки виконуються умови

$$\frac{\partial^2 r}{\partial r_0^2} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial z_0} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial r_0} = 0. \tag{3}$$

Це дозволяє точно задавати граничні умови, що значно підвищує точність обчислень.

Програма обчислення сплайну (1) дозволяє легко виконати ряд операцій над таблично заданими функціями. У програму включена процедура обчислення значень сплайн-функції і її першої і другої похідних у довільній точці області визначення, а також процедура побудови графіка сплайну. Вибір вагових коефіцієнтів ρ_i виконаний за методикою, описаною у [9]. Розроблена процедура, що реалізує ітераційний процес вибору вагових коефіцієнтів. Вагові коефіцієнти вибираються так, щоб забезпечити найбільшу гладкість сплайну і задовольнити умову

$$|f_i - S(x_i)| \leq \delta_i, \quad i = 1, \dots, n, \tag{4}$$

де δ_i — абсолютна похибка експериментального значення функції f_i (похибка вимірювань координат точки (r_{ij}, z_{ij})) (абсолютная погрешность экспериментального значения функции f_i (погрешность измерения координат точки (r_{ij}, z_{ij})), the absolute error of the function f_i experimental values (the error of the point (r_{ij}, z_{ij}) coordinates measurement).

Ітераційний процес продовжується допоки не буде виконано умову (4) для усіх вузлів сплайну.

Інформацію про вихідну і спотворену координатну сітку одержували шляхом її сканування. Обробка сканованого зображення ділильної сітки на будь-якій стадії деформування за допомогою розробленого нами програмного модуля дозволяє створити базу даних координат вузлових точок сітки. Отримані дані записуються в робочих листах файла Microsoft Excel і використовуються для подальшої апроксимації. Такий спосіб дозволив значно зменшити похибку вимірювань координат вузлів координатної сітки δ_i .

У робочому вікні розробленої програми відкривають файл зображення формату *. bmp (рис. 1). Натискаючи лівою клавішею миші на зображенні, вибираються точки ділильної сітки, координати яких необхідно визначити.

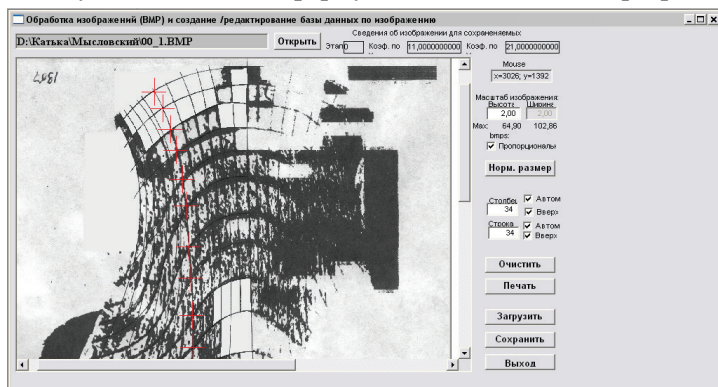


Рис. 1. Рабочее окно программы
Fig. 1. Program window

Порядок задання координат вузлів повинен відповідати лінії течії металу в процесі деформації. Отримані координати заносяться у файл електронної таблиці Excel (рис. 2).

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
dwl_stage	dwl_row	dwl_col	dwl_x	dwl_y	dwr_koef_x	dwr_koef_y	dwl_x0	dwl_y0							
0	1	1	492	194	11	21									
0	2	2	520	242	11	21									
0	3	3	545	302	11	21									
0	4	4	563	362	11	21									
0	5	5	584	446	11	21									
0	6	6	597	522	11	21									
0	7	7	604	640	11	21									
0	8	8	611	730	11	21									
0	9	9	616	838	11	21									
0	10	10	618	930	11	21									
0	11	11	602	1018	11	21									
0	12	12	579	1088	11	21									
0	13	13	561	1136	11	21									
0	14	14	540	1190	11	21									
0	15	15	538	1232	11	21									
0	16	16	536	1276	11	21									
0	17	17	531	1314	11	21									
0	18	18	531	1354	11	21									
0	19	19	524	1396	11	21									
0	20	20	529	1440	11	21									

Рис. 2. Файл MS Excel, у якому зберігаються значення координат вузлових точок
 Рис. 2. Файл MS Excel, в котром хранятся значения координат узловых точек
 Fig. 2. MS Excel file with the values of nodal points coordinates

Апроксимуючи отримані експериментальні данні, задавалися граничними умовами аналогічними (3), а там де граничні умови не відомі — приймали $S''(0) = S''(n) = 0$. Оперуючи експериментальними даними, обчислювали значення других похідних функції у вузлах апроксимації за методикою [9], що дозволило обчислити значення сплайн-функцій у вузлових точках сітки.

Випишемо в розгорнутому вигляді систему рівнянь, яку необхідно розв’язувати в разі побудови згладжувального сплайну. У неперіодичному випадку вони мають п’ятидіагональну структуру [9]

$$\begin{aligned}
 a_0 M_0 + b_0 M_1 + c_0 M_2 &= g_0; \\
 b_0 M_0 + a_1 M_1 + b_1 M_2 + c_1 M_3 &= g_1; \\
 c_{i-2} M_{i-2} + b_{i-1} M_{i-1} + a_i M_i + b_i M_{i+1} + c_i M_{i+2} &= g_i, \quad i = 2, \dots, N-2; \\
 c_{N-3} M_{N-3} + b_{N-2} M_{N-2} + a_{N-1} M_{N-1} + b_{N-1} M_N &= g_{N-1}; \\
 c_{N-2} M_{N-2} + b_{N-1} M_{N-1} + a_N M_N &= g_N.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Коефіцієнти цієї системи визначаються формулами

$$\begin{aligned}
 a_i &= \frac{1}{3} (h_{i-1} + h_i) + \frac{1}{h_{i-1}^2} \rho_{i-1} + \left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} \right)^2 \rho_i + \frac{1}{h_i^2} \rho_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \\
 b_i &= \frac{1}{6} h_i - \frac{1}{h_i} \left[\left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} \right) \rho_i + \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right) \rho_{i+1} \right], \quad i = 1, 2, \dots, N-2; \\
 c_i &= \frac{1}{h_i h_{i+1}} \rho_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-3; \\
 g_i &= \frac{z_{i+1}^0 - z_i^0}{h_i} - \frac{z_i^0 - z_{i-1}^0}{h_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Якщо згладжувальний сплайн задовольняє умови $S''(0) = S''(n) = 0$, то

$$a_0 = a_N = 1; \quad b_0 = c_0 = c_{N-2} = b_{N-1} = g_0 = g_N = 0.
 \tag{7}$$

Для розв’язання системи (5) використовували алгоритм розв’язку системи рівнянь з п’ятидіагональними матрицями, заснований на розкладанні матриць системи у вигляді LWL^T , де L — нижня трикутна матриця з одиничною діагоналлю, а W — діагональна матриця з позитивними елементами [9].

Після обчислення M_i із системи (5) значення сплайну z_i визначаються співвідношенням

$$z_i - z_i^0 = \rho_i D_i, \quad i = 0, \dots, N, \tag{8}$$

причому

$$D_0 = \frac{1}{h} (M_1 - M_0);$$

$$D_i = \frac{1}{h_i} (M_{i+1} - M_i) - \frac{1}{h_{i-1}} (M_i - M_{i-1}), \quad i = 1, \dots, N-1;$$

$$D_N = \frac{-1}{h_{N-1}} (M_N - M_{N-1}).$$

Найважливішою задачею у побудові згладжувального сплайну є вибір вагових коефіцієнтів ρ_i . Зазначимо, що якщо $\rho_i = 0$, то згладжувальний сплайн перетворюється в інтерполяційний. Звідси випливає, що чим точніше задано експериментальні значення координат z_i^0 у вузлах сітки, тим меншими повинні бути вагові множники ρ_i . В практичних задачах зазвичай відомі помилки у визначенні величин z_i^0 , тобто $|z_i^0 - z_i| \leq \delta_i$, де z_i — значення сплайну. У цій ситуації природно побажати, щоб згладжувальний сплайн $S(x)$ задовольняв умову (4), яку перепишемо у вигляді

$$|z_i^0 - z_i| \leq \delta_i, \quad i = 0, \dots, N, \tag{10}$$

або
$$\rho_i |D_i| \leq \delta_i, \quad i = 0, \dots, N \dots \tag{11}$$

Ці обмеження були використані для обчислення вагових множників ρ_i . Побудовано ітераційний процес, реалізація якого дозволила одержати невідомі M_i і множники ρ_i

$$(A + 6HR^{(k)}H^T)M^{(k)} = 6HZ^0; \tag{12}$$

$$\rho_i^{(k+1)} = \begin{cases} \delta_i / |D_i^k|, & \text{якщо (если, if) } D_i^k \neq 0; \\ 0, & \text{якщо (если, if) } D_i^k = 0, \end{cases} \tag{13}$$

де k — номер ітерації (номер итерации; the iteration number).

Матриці A і H мають такий вигляд

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & r_1 & h_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & h_1 & r_2 & h_2 & \cdot & \cdot \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & h_{N-3} & r_{N-2} & h_{N-2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & h_{N-2} & r_{N-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{14}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ h_0^{-1} & -(h_0^{-1} + h_1^{-1}) & h_1^{-1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & h_{N-2}^{-1} & -(h_{N-2}^{-1} + h_{N-1}^{-1}) & h_{N-1}^{-1} \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad R = \begin{bmatrix} \rho_1 & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \rho_N \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Зв'язок між M_i і z_i визначається матричним рівнянням

$$AM = 6HZ. \tag{16}$$

Як початкове наближення брали $\rho_i^0 = 0$, що відповідає інтерполяційному сплайну зі значеннями

$D_i = D_i^0$. Ітераційний процес продовжується допоки значення сплайну z_i у вузлах сітки не виявлять-ся в «коридорі», який визначається співвідношенням (10).

У роботі оптимальні значення сплайну z_i у вузлах сітки були отримані для значень вагових ко-ефіцієнтів, що відповідають похибкам вимірювань $\delta_i \leq 0,01$.

Розроблений програмний модуль використано для апроксимації експериментальних залежнос-тей r від r_0 за умови $z = \text{const}$ для процесу прямого видавлювання. Частину отриманих згладжува-льних кривих показано на рис. 3.



Рис. 3. Графіки сплайн-функцій, отримані для значень вагових коефіцієнтів, що відповідають похибкам вимірювань $\delta_i \leq 0,01$

Рис. 3. Графики сплайн-функций, полученные для значений весовых коэффициентов, соответствующих погрешностям измерений $\delta_i \leq 0,01$

Fig. 3. Spline-function plots, obtained for the weight factors values, which correspond to the measurement errors $\delta_i \leq 0.01$

Аппроксимация массивов экспериментальных данных

В работе рассматривается случай, имеющий место при исследовании осесимметрических процессов обработки металлов давлением, когда в качестве исходной используется информация об искажении координатных сеток или линий тока. В этом случае экспериментальные данные представляют в виде таблично заданных массивов текущих (эйлеровых) координат z, r от исходных (лагранжевых) z_0, r_0 и времени t .

Функции эйлеровых координат от лагранжевых $z(z_0, r_0, t)$ и $r(z_0, r_0, t)$, могут быть получены аппроксимацией экспериментальных значений $r_{ij}(t)$ и $z_{ij}(t)$, измеренных в узлах сетки i, j . Однако, решение задачи многомерного сглаживающего сплайна связано с целым рядом трудностей, основной из которых является построение решений для задач со сложной конфигурацией границы. Поэтому сначала кубическими сплайнами аппроксимировали зависимости $z(z_0, r_0 = \text{const}, t = \text{const})$, $r(z_0, r_0 = \text{const}, t = \text{const})$ и др. которые легко дифференцируются и которые в дальнейшем легко использовать для определения тензора скоростей деформаций. Поэтому в данной работе для решения поставленной задачи использованы сглаживающие кубические сплайны одного аргумента (1) [6—9].

Критерием качества аппроксимации в этом случае является функционал (2) [9].

Задача сглаживания формулируется в виде минимизации функционала (2). Структура функционала (2) обеспечивает компромисс между требованиями минимальной кривизны сплайна $S(x)$ и, в то же время, наименьшего отклонения сплайна от заданных экспериментальных значений. В большинстве случаев эти требования противоречивы, то есть приближение кривой к экспериментальным точкам увеличивает кривизну и наоборот. Необходимое соотношение между этими требованиями обеспечивается выбором весовых коэффициентов.

Нахождение коэффициентов a_j^i сводится к решению системы уравнений с пятидиагональной матрицей. Для получения замкнутой системы уравнений необходимо задать граничные условия. Использовать сплайн-функции в задачах обработки металлов давлением удобно потому, что граничные условия известны из постановки задачи.

Например, для осесимметрического пластического деформирования на оси симметрии заготовки выполняются условия (3).

Это позволяет точно задавать граничные условия, что значительно повышает точность вы-

числений.

Программа вычисления сплайна (1) позволяет легко выполнить ряд операций над таблично заданными функциями. В программу включена процедура вычисления значений сплайн-функции и ее первой и второй производной в произвольной точке области определения, а также процедура построения графика сплайна. Выбор весовых коэффициентов ρ_i выполнен по методике, описанной в [9]. Разработана процедура, которая реализует итерационный процесс выбора весовых коэффициентов. Весовые коэффициенты выбираются так, чтобы обеспечить наибольшую гладкость сплайна и удовлетворить условию (4).

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет выполнено условие (4) для всех узлов сплайна.

Информацию об исходной и деформированной координатных сетках получали путем ее сканирования. Обработка сканированного изображения делительной сетки на какой-либо стадии деформирования при помощи разработанного нами программного модуля позволяет создать базу данных координат узловых точек сетки. Полученные данные записываются на рабочих листах файла Microsoft Excel и используются для дальнейшей аппроксимации. Такой способ позволил значительно уменьшить погрешность измерений координат узлов координатной сетки δ_i .

В рабочем окне разработанной программы открывают файл изображения формата *. bmp (рис. 1). Нажимая левой клавишей мыши на изображении, выбираются точки делительной сетки, координаты которых необходимо определить. Порядок задания координат узлов должен соответствовать линии тока металла в процессе деформации. Полученные координаты заносятся в файл электронной таблицы (рис. 2).

Для аппроксимации полученных экспериментальных данных задавались граничные условия аналогичные (3), а там где граничные условия не известны принимали $S''(0) = S''(n) = 0$. Оперирова экспериментальными данными, вычисляли значения вторых производных функции в узлах аппроксимации по методике [9], что позволило вычислить значения сплайн-функций в узловых точках сетки.

Выпишем в развернутом виде системы уравнений, которые необходимо решать при построении сглаживающего сплайна. В непериодическом случае они имеют пятидиагональную структуру (5), [9].

Коэффициенты этой системы определяются формулами (6).

Если сглаживающий сплайн удовлетворяет условиям $S''(0) = S''(n) = 0$, то (7).

Для решения системы (5) использовали алгоритм решения систем уравнений с пятидиагональными матрицами, основанный на разложении матриц системы в виде LWL^T , где L — нижняя треугольная матрица с единичной диагональю, а W — диагональная матрица с положительными элементами [9].

После вычисления M_i из системы (5) значения сплайна z_i определяются соотношением (8).

Наиболее важной задачей при построении сглаживающего сплайна является выбор весовых коэффициентов ρ_i . Отметим, что если $\rho_i = 0$, то сглаживающий сплайн превращается в интерполяционный. Отсюда вытекает, что чем точнее заданы экспериментальные значения координат z_i^0 в узлах сетки, тем меньшими должны быть весовые коэффициенты ρ_i . В практических задачах обычно известны погрешности в определении величин z_i^0 , то есть $|z_i^0 - z_i| \leq \delta_i$, где z_i — значения сплайна. В этой ситуации естественно пожелать, чтобы сглаживающий сплайн $S(x)$ удовлетворял условию (4) которое перепишем в виде (10) или (11).

Эти ограничения были использованы для вычисления весовых коэффициентов ρ_i . Построен итерационный процесс, реализация которого позволила получить неизвестные M_i и множители ρ_i (12), (13).

Матрицы A и H имеют вид (14) и (15) соответственно.

Связь между M_i и z_i определяется матричным уравнением (16).

Как начальное приближение принимали $\rho_i^0 = 0$, что соответствует интерполяционному сплайну со значениями $D_i = D_i^0$. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока значения сплайна z_i в узлах сетки не окажутся в «коридоре», который определяется соотношением (10).

В работе оптимальные значения сплайна z_i в узлах сетки были получены при значениях весовых коэффициентов, которые отвечают погрешностям измерений $\delta_i \leq 0,01$.

Разработанный программный модуль использован для аппроксимации экспериментальных зависимостей r от r_0 при $z = \text{const}$ для процесса прямого выдавливания. Часть полученных сглаживающих кривых приведена на рис. 3.

Experimental data arrays approximation

The paper considers the situation, which takes place during the research of the axisymmetric processes of metal processing with pressure, when the information on the distortion of coordinate grids or flow lines is used as initial information. In this case the experimental data are presented in the form of tabular arrays of the current (Euler) coordinates z, r from the initial Lagrange coordinates z_0, r_0 and time t .

The functions of Euler coordinates from Lagrange, $z(z_0, r_0, t)$ and $r(z_0, r_0, t)$, can be obtained by the approximation of experimental values of $r_{ij}(t)$ and $z_{ij}(t)$ measured in the grid nodes i, j . However, the solution of the multidimensional smoothing spline task involves a number of difficulties, the main of which are connected with building the solutions for the tasks with complex boundary configuration. Therefore the relationships $z(z_0, r_0 = \text{const}, t = \text{const})$, $r(z_0, r_0 = \text{const}, t = \text{const})$ were the first approximated by cubic splines. These relationships are easily differentiated and then are easily used for estimating the components of the deformation rate tensor. So in this paper one argument smoothing cubic splines are used to solve the problem (1) [6—9]

In this case the approximation quality criterion is the functional (2), [9]

The problem of smoothing is formulated in the form of functional minimization (2). The structure of the functional (2) provides a compromise between the requirements of the spline $S(x)$ minimal curvature and, at the same time, the spline least deviation from the prescribed experimental values. In most cases these requirements are contradictory, i. e. the curve approximation to the experimental points increases the curvature and visa versa. The necessary relations between these requirements are provided by the right choice of weight factors.

The estimation of a_j^i factor is confined to the solution of the equation set with pentadiagonal matrix. In order to obtain the closed set of equations it is necessary to set the boundary conditions.

Application of spline-functions in the problems of metal processing with pressure is convenient because the boundary conditions are often known from the problem formulation.

For example, in axisymmetrical problems the following conditions are satisfied on the workpiece axis of symmetry (3).

This enables accurate specification of boundary conditions, which considerably improves the computation accuracy.

The program for spline computation (1) allows to perform a number of operations on tabulated functions. The program includes the procedure for the computation of spline-function values and its first and second derivatives in a random point of the function domain as well as the procedure for spline plot construction. The choice of weight coefficients was made using the procedure [9]. There had been developed the procedure that realizes the iterative process of choosing the weight factors. The weight factors are chosen so that they provide the highest smoothness of the spline and satisfy the conditions (4).

Iterative process continues until the condition (4) is satisfied for all nodes of the spline.

Information on the initial and the distorted coordinate grid was obtained by means of its scanning. Processing of the coordinate grid scanned image at any deformation stage with the help of the developed program module, allows to create a data base of the grid nodal points coordinates. The obtained data are written in the working sheets of the Microsoft Excel file and are used for further approximation. This method enabled to reduce considerably the measurement error the coordinates of the grid δ_i nodes.

In the window of the developed program the image file of the *. bmp format (fig. 1) is opened. By clicking on the image with the left mouse button the grid points, which coordinates must be determined, are chosen. The order of settings the node coordinates must correspond to the line of metal flow in the deformation process. The obtained coordinates are written in the file of an Excel electronic table (fig. 2).

For the obtained experimental data approximation, the boundary conditions similar to those in (3) were set. And if the boundary conditions were unknown it was assumed that $S''(0) = S''(n) = 0$. Using the experimental data, the values of other derivative functions in the approximation nodes were estimated by means of procedure [9], which enabled to calculate the values of spline-functions in the nodal points of the grid.

The equations to be solved for the construction of a smoothing spline were written in an expanded form. In a non-periodical case they have penta-diagonal structure (5), [9].

The factors of this system are determined by the formulas (6).

If the smoothing spline satisfies the conditions $S''(0) = S''(n) = 0$, then (7).

For solving the equation set (5) the solution algorithm for the equation sets with penta-diagonal matrices was used. This algorithm is based on the system matrices decomposition in the form LWL^T , where L is a bottom triangular matrix with single diagonal and W — diagonal matrix with positive elements [9].

After calculating M_i from (5), the values of spline z_i shall be determined by correlation (8), (9).

While building a smoothing spline, the most important problem is the choice of weight factors ρ_i . It should be noted that if $\rho_i = 0$, the smoothing spline is transformed into an interpolated one. It follows that the more accurately the experimental values of z_i^0 coordinates in grid nodes are set, the smaller the weight factor values will be. In practical tasks there could certainly be errors in the estimation of the z_i^0 values, i. e. $|z_i^0 - z_i| \leq \delta_i$, where z_i is the spline value. In this situation it is quite natural to wish the smoothing spline $S(x)$ to satisfy the condition (4) that can be rewritten as (10) or (11).

The limitations were used to calculate the weight factors ρ_i . We have built the iterative process, the realization of which enabled to obtain the unknown quantities M_i and factors ρ_i (12), (13).

The matrices A and H have the following form (14), (15).

The relationship between M_i and z_i is defined by the matrix equation (16).

As the initial approximation it was assumed that $\rho_i^0 = 0$, which corresponds to the interpolating spline with the values of $D_i = D_i^0$ the iterative process is going on until the value of spline z_i in the grid nodes turns to be in the «corridor» defined by the correlation (10).

In this paper the optimal values of spline z_i in the grid nodes were obtained for the weight factors values which correspond to the measurement errors $\delta_i \leq 0,01$.

The developed program module has been used for the approximation of the experimental relationships r versus r_0 when $z = \text{const}$ for the direct extrusion process. Some of the obtained smoothing curves are presented in fig. 3.

Висновки

Розроблено методику розрахунку характеристик кінематики деформування для осесиметричних процесів обробки тиском, яка основана на апроксимації експериментальних функцій згладжувальними кубічними сплайнами одного аргументу. Інформацію про вихідну і спотворену координатну сітку одержували шляхом її сканування й обробки сканованого зображення ділильної сітки за допомогою розробленого програмного модуля, що дозволяє створити базу даних координат вузлових точок сітки.

Выводы

Разработана методика расчета характеристик кинематики деформирования при осесимметрических процессах обработки давлением, основанная на аппроксимации экспериментальных функций сглаживающими кубическими сплайнами одного аргумента. Информацию об исходной и деформированной координатной сетке получали путем ее сканирования и обработки сканированного изображения делительной сетки при помощи разработанного программного модуля, позволяющего создать базу данных координат узловых точек сетки.

Conclusions

There had been developed the methodics for the calculation of the deformation kinematics characteristics for the axisymmetrical tasks, based on the approximation of experimental functions by one-argument smoothing cubic splines. The information on the initial and the distorted coordinate grid was obtained by means of its scanning and processing of the coordinate grid scanned image using the developed program module. It enables to create the data base of the grid nodal points coordinates.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ
REFERENCES

1. Карымов Д. Н. О точности аппроксимации в предельной теореме Пуассона // Дискретная математика. — Т. 16. — Вып. 2. — 2004. — С. 148—159.
2. Кокурин М. Ю. Об устойчивости аппроксимации решений негладких операторных уравнений // Изв. ВУЗов. Математика. — 2005. — № 4. — С. 32—36.
3. Огородников В. А., Киселев В. Б., Сивак И. О. Энергия. Деформации. Разрушение (задачи автотехнической экспертизы). — Винница: УНІВЕРСУМ—Вінниця, 2005. — 204 с.
4. Михалевич В. М. Программа сглаживания экспериментальных данных кубическими сплайнами. — К.: УРФАП, 1979. — 29 с.
5. Огородников В. А., Михалевич В. М., Покрас В. Д. Применение сплайн-функций в методе визиопластичности для определения деформаций при выдавливании и волочении // Тр. I Всесоюзного семинара «Оптико-геометрические методы исследования деформаций и напряжений и их стандартизация». — Горький, 1982. — С. 131—132.
6. Дель Г. О., Новиков Н. А. Метод делительных сеток. — М.: Машиностроение, 1979. — 144 с.
7. Евстратов В. А. Теория обработки металлов давлением. — Харьков: Высшая школа, 1981. — 248 с.
8. Алиев И. С. Технологические процессы холодного поперечного выдавливания // Кузнечно-штамповочное производство. — 1988. — № 6. — С. 1—4
9. Завялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. — Л. — М.: Наука. — 1980. — 350 с.

Рекомендована кафедрою технології та автоматизації машинобудування

Надійшла до редакції 20.09.05
Рекомендована до друку 2.11.05

Коцюбівська Катерина Іванівна — асистент, **Сухоруков Сергій Іванович** — аспірант

Кафедра технології та автоматизації машинобудування;

Клочко Віталій Іванович — завідувач кафедри вищої математики,

Вінницький національний технічний університет;

Чубатюк Альона Валентинівна — магістр кафедри теорії ймовірностей і математичної статистики.

Київський національний університет імені Т. Шевченка

Коцюбивская Екатерина Ивановна — ассистент, **Сухоруков Сергей Иванович** — аспирант

Кафедра технологии и автоматизации машиностроения;

Клочко Виталий Иванович — заведующий кафедрой высшей математики.

Винницкий национальный технический университет;

Чубатюк Альона Валентинівна — магістр кафедри теорії ймовірностей і математичної статистики.

Киевский национальный университет имени Т. Шевченко

Katerina Kotsubivska — Assistant, **Sergiy Suhorukov** — Post-Graduate Student.

Chair of Machine-engineering Technology and Automation;

Vitaliy Klochko — Head of the Chair of Higher Mathematics,

Vinnytsia National Technical University

Aliona Chubatiuk — Master of Sciences- of the Chair of Probability Theory and Mathematical Statistic.

National Taras Shevchenko University of Kyiv