

ЕНЕРГЕТИКА ТА ЕЛЕКТРОТЕХНІКА

ЭНЕРГЕТИКА ТА ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

ENERGY AND ELECTRICAL ENGINEERING

УДК 515.12

УДК 621.3.031:510.6

Б. І. Мокін, д. т. н., проф.; В. В. Камінський

Б. И. Мокин, д. т. н., проф.; В. В. Каминский

B. Mokin, Dr. Sc. (Eng.), Prof.; V. Kaminskyu

ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ СЛАБКИХ МНОЖИН ТА ЇХ СИСТЕМ НЕЧІТКИХ РЕАЛІЗАЦІЙ

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СЛАБЫХ МНОЖЕСТВ И ИХ СИСТЕМ НЕЧЁТКИХ РЕАЛИЗАЦИЙ

GEOMETRICAL INTERPRETATION OF POOR SETS AND THEIR SYSTEMS OF FUZZY REALIZATIONS

Пропонуються способи геометричного зображення слабких множин в спеціальних напрямлених та звичайних декартових осях координат. Це спрощує та полегшує сприйняття, розуміння та використання теорії слабких множин, як нового універсального засобу моделювання складних систем в умовах невизначеності даних.

Предлагаются способы геометрического изображения слабых множеств в специальных направленных и обычных декартовых осях координат. Это упрощает и облегчает восприятие, понимание и использование теории слабых множеств, как нового универсального средства моделирования сложных систем в условиях неопределенности данных.

Means of geometrical representation of poor sets in the specially directed and usual Cartesian coordinate axes are suggested. This simplifies the perception, comprehension and the usage of poor sets theory as a new universal tool of complex systems simulation under the conditions of data indeterminacy.

Вступ

В роботі [1] автори вперше запропонували новий підхід до математичного моделювання складних систем в умовах невизначеності даних, який базується на використанні слабких множин. Авторами розроблені основні положення теорії слабких множин, як нового, універсальнішого в порівнянні з теорією нечітких множин, засобу моделювання невизначених параметрів складних систем [1—4]. Ця теорія на відміну від існуючих дає можливість моделювати процеси в складних системах в умовах відсутності не тільки числових, але навіть нечітких та лінгвістичних значень невизначених вихідних даних [3].

Слабка множина однозначно задається своєю функцією рівнів, яка набуває значення в просторі напрямлених рівнів належності [1, 2]. Елементами цього простору є упорядковані пари, першим елементом яких є дійсне число, а другим — символ. В цьому просторі діють спеціальні відношення порядку, відмінні від аналогічних відношень на множині дійсних чисел. З цих причин слабка множина не може мати такої простої геометричної інтерпретації, як нечітка множина. В той же час відсутність геометричного зображення слабких множин утруднює їх сприйняття, розуміння та використання. Тому в цій роботі автори пропонують способи геометричного зображення слабких множин, які вирішують зазначені проблеми.

Введение

В работе [1] авторы впервые предложили новый подход к математическому моделированию сложных систем в условиях неопределенности данных, который базируется на использовании слабых множеств. Авторами разработаны основные положения теории слабых множеств, как нового, более универсального по сравнению с теорией нечетких множеств, средства моделирования неопределен-

ных параметров сложных систем [1—4]. Эта теория в отличие от существующих дает возможность моделировать процессы в сложных системах в условиях отсутствия не только числовых, но даже нечетких и лингвистических значений неопределенных исходных данных [3].

Слабое множество однозначно задается своей функцией уровней, которая принимает значения в пространстве направленных уровней принадлежности [1, 2]. Элементами этого пространства являются упорядоченные пары. Первым элементом каждой такой пары является действительное число, а вторым — символ. В этом пространстве действуют специальные отношения порядка, отличные от аналогичных отношений на множестве действительных чисел. По этим причинам слабое множество не может иметь такой простой геометрической интерпретации, как нечеткое множество. В тот же время отсутствие геометрического изображения слабых множеств затрудняет их восприятие, понимание и использование. Поэтому в этой работе авторы предлагают способы геометрического изображения слабых множеств, которые решают отмеченные проблемы.

Introduction

In [1] the authors were the first to suggest the new approach to the mathematical simulation of complex systems under the conditions of data indeterminacy, based on the application of poor sets theory. The authors developed the fundamentals of poor sets theory as a new, more universal in comparison with fuzzy sets theory, means of simulation of ambiguous parameters of complex systems [1—4]. This theory, unlike existing ones, allows to simulate the processes in complex systems under the conditions of absence of not only numerical but even fuzzy and linguistic values of the indetermined input data [3].

Poor set is unambiguously assigned by its function of levels which accept the values in the space of directed levels of membership [1, 2]. Elements of this space are the ordered pairs. The first element of each pair is a real number and the second — a symbol. The special ordering ratios, different from the analogous ratios on the set of the real numbers, operate in this space. This prevents the poor set from having such a simple geometric interpretation as a fuzzy set has. At the same time the absence of the geometric image of poor sets complicates their perception, comprehension and usage. The authors suggest in this paper the means of geometrical representation of poor sets.

Слабкі множини та їх геометрична інтерпретація

Поняття слабкої множини, вперше введено авторами в роботі [2], а в роботі [3] показано як можна використовувати слабкі множини для моделювання невизначених параметрів складних систем. Слабка множина є більш загальною та універсальною математичною конструкцією, аніж нечітка множина. Для її формалізації спочатку введені поняття: **простору ненапрямлених рівнів належності** M_α (на відміну від ступенів належності в теорії нечітких множин), як множини, яка утримує найменший $\min M_\alpha$ та найбільший $\max M_\alpha$ елементи відносно деякого, заданого на ній, нестрогого лінійного порядку D_α ; **напрямленості**, як властивості рівня належності, яка може набувати одне із двох можливих значень із **простору напрямленостей рівнів належності** $M_\omega = \{+, -\}$, на якому задано нестрогий лінійний порядок D_ω такий, що $D_\omega = \{(+, +), (+, -), (-, -)\}$; **простору напрямлених рівнів належності** $M_{\alpha\omega}$, як множини $M_{\alpha\omega} = M_\alpha \times M_\omega \setminus \{(\max M_\alpha; \min M_\omega)\}$ із заданим на ній бінарним відношенням строгого досконалого порядку $S_{\alpha\omega}$ таким, що

$$\forall (\alpha, \omega_\alpha), (\beta, \omega_\beta) \in M_{\alpha\omega} \left((\beta, \omega_\beta) S_{\alpha\omega} (\alpha, \omega_\alpha) \Leftrightarrow (\beta S_\alpha \alpha \wedge \omega_\beta E_\omega \omega_\alpha) \vee (\omega_\beta S_\omega \omega_\alpha) \right). \quad (1)$$

Діагональні відношення E_α , E_ω , $E_{\alpha\omega}$ на M_α , M_ω , $M_{\alpha\omega}$ прийняті за відношення рівності елементів відповідних множин, а їх доповнення — за відповідні відношення нерівності. Відношення $S_\alpha = D_\alpha \setminus E_\alpha$, $S_\omega = D_\omega \setminus E_\omega$, та $D_{\alpha\omega} = S_{\alpha\omega} \cup E_{\alpha\omega}$, прийняті за відношення строгого порядку на множинах M_α , M_ω та нестрогого порядку на $M_{\alpha\omega}$, що є природним для теорії бінарних відношень. Елементи множини $M_{\alpha\omega}$ є упорядкованими парами (α, ω) , $\alpha \in M_\alpha$, $\omega \in M_\omega$, для яких вводиться також більш просте та зручне позначення α^ω . У випадку відомого значення напрямленостей (наприклад $\omega = +$ та $\psi = -$) будемо також писати $(\alpha, +)$, $(\beta, -)$ або α^+ , β^- та називати рівень α^+ позитивно напрямленим, а рівень β^- — негативно напрямленим.

В найпростішому випадку використовується простір ненапрямлених рівнів $M_\alpha = [0; 1]$ із заданими на ньому природними відношеннями порядку $\geq, >$ та оберненими до них $\leq, <$, а також діагональним відношенням $=$ та його доповненням \neq . В цьому випадку $M_{\alpha\omega} = [0; 1] \times \{+, -\} \setminus \{(1; -)\}$. Для зручності відношення $S_\omega, D_\omega, E_\omega, \bar{E}_\omega$ на множині $M_\omega = \{+, -\}$, а також відношення $S_{\alpha\omega}, D_{\alpha\omega}, E_{\alpha\omega}, \bar{E}_{\alpha\omega}$ на множині $M_{\alpha\omega}$ будемо позначати однаково за допомогою знаків $>, \geq, =, \neq$, аналогічно відповідним відношенням на множині дійсних чисел, а відношення, обернені до відношень $S_\omega, S_{\alpha\omega}$ та $D_\omega, D_{\alpha\omega}$, — знаками $<$ та \leq відповідно.

Щоб отримати геометричне зображення декартового добутку $M_\alpha \times M_\omega$ використаємо декартові осі координат. По осі абсцис відкладемо простір ненапрямлених рівнів належності $M_\alpha = [0; 1]$, а по осі ординат — знизу вверх два елементи простору напрямленостей в порядку їх зростання згідно зі строгим лінійним порядком S_ω на M_ω

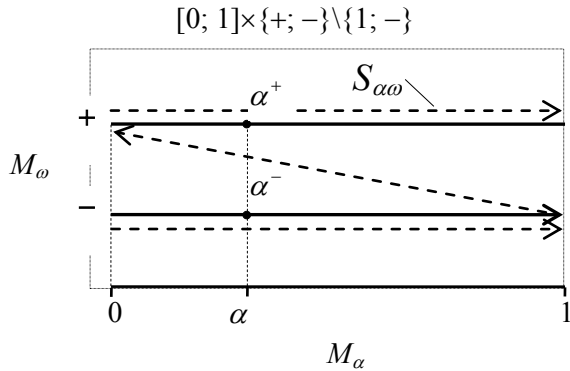


Рис. 1. Геометричне зображення простору напрямлених рівнів належності в декартових осях

Рис. 1. Геометрическое изображение пространства направленных уровней принадлежности в декартовых осях

Fig. 1. Geometrical representation of the space of directional levels of membership in Cartesian axes

а по осі ординат — знизу вверх два елементи простору напрямленостей в порядку їх зростання згідно зі строгим лінійним порядком S_ω на M_ω (1). В такому випадку простір напрямлених рівнів належності $M_{\alpha\omega}$, який складається із упорядкованих пар (α, ω) , $\alpha \in M_\alpha, \omega \in M_\omega$ і не утримує пари $(1; +)$, буде зображатись усіма точками відрізка прямої, розташованого на рівні напрямленості $+$ і внутрішніми та лівою граничною точками відрізка, розташованого на рівні негативної напрямленості (рис. 1).

Граничні точки верхнього відрізка на цьому рисунку відповідають точкам $(\min M_\alpha; +)$ та $(\max M_\alpha; +)$ простору $M_{\alpha\omega}$. Права гранична точка нижнього відрізка не входить в простір $M_{\alpha\omega}$ (про це говорить стрілка з правої сторони цього

відрізка), а ліва границя цього відрізка відповідає точці $(\min M_\alpha; -)$ простору $M_{\alpha\omega}$. Напрямок зростання значень напрямлених рівнів належності згідно зі строгим лінійним порядком $S_{\alpha\omega}$ на $M_{\alpha\omega}$ показано на рисунку пунктирними стрілками.

Введемо поняття **осі напрямлених рівнів належності**, як єдиного відрізка прямої, точки якого взаємно однозначно відповідають всім елементам простору $M_{\alpha\omega}$ і упорядковані зліва на право згідно зі строгим лінійним порядком $S_{\alpha\omega}$ на $M_{\alpha\omega}$. З рис. 1 випливає, що зображений на цьому рисунку нижній відрізок без правої граничної точки та верхній відрізок із обома граничними точками можна з'єднати неперервно так, що ліва границя верхнього відрізка, яка відповідає точці $\min M_\alpha^+ = 0^+$, стане одночасно правою граничною точкою нижнього відрізка. В результаті ми отримаємо вісь напрямлених рівнів належності (рис. 2). Напрямок зростання значень напрямлених рівнів належності згідно зі строгим лінійним порядком $S_{\alpha\omega}$ на $M_{\alpha\omega}$ показано на рисунку пунктирною стрілкою.

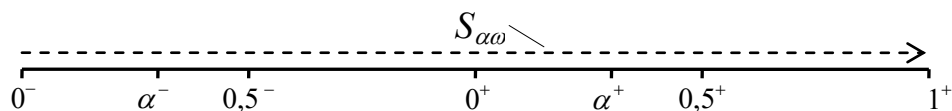


Рис. 2. Вісь напрямлених рівнів належності при $M_\alpha = [0; 1]$

Рис. 2. Ось направленных уровней принадлежности при $M_\alpha = [0; 1]$

Fig. 2. Axe of directional levels of membership for $M_\alpha = [0; 1]$

Слабкою множиною \tilde{A} в універсумі X в роботі [1] названо множину упорядкованих пар $\{(x, v_A(x)) \mid x \in X, v_A : X \rightarrow M_{\alpha\omega}\}$, а векторну функцію v_A — функцією напрямлених рівнів

належності, або просто **функцією рівнів** слабкої множини \tilde{A} . Функцію рівнів довільної слабкої множини \tilde{A} можна подати у вигляді пари функцій $\alpha_A : X \rightarrow M_\alpha$, $\omega_A : X \rightarrow M_\omega$ таких, що

$$(\alpha_A(x) = 1 \Rightarrow \omega_A(x) \neq -) \wedge (\omega_A(x) = - \Rightarrow \alpha_A(x) \neq 1), \forall x \in X. \quad (2)$$

Першу функцію пари α_A , яка ставить у відповідність кожному елементу універсума X деякий ненапрявлений рівень належності, будемо називати **функцією ненапрямлених рівнів** слабкої множини \tilde{A} , а другу функцію пари ω_A , яка задає тим самим елементам напрямленість їх рівнів належності — **функцією напрямленостей** слабкої множини \tilde{A} . Таким чином функцію рівнів слабкої множини \tilde{A} можна подати у векторному вигляді, як функцію v_A , або в координатному — як пару функцій (α_A, ω_A) .

Між слабкими та нечіткими множинами можна встановити зв'язок, якщо вважати, що сформована в деякому універсумі слабка множина визначає для кожного елемента універсума односторонню границю можливих значень його ступеня належності ще не сформованій в цьому універсумі нечіткій множині. При цьому позитивно напрямлені рівні належності задають мінімально можливі значення ступенів належності, а негативно напрямлені — їх максимально можливі значення. Згідно з такою інтерпретацією напрямлених рівнів належності в роботі [3] введено поняття реалізації слабкої множини. Реалізацією слабкої множини \tilde{A} в X названо нечітку множину \tilde{A} в X , функція належності $\mu_A : X \rightarrow M_\alpha$ якої задовольняє такі умови

$$(\omega_A(x) = + \Rightarrow \mu_A(x) \geq \alpha_A(x)) \wedge (\omega_A(x) = - \Rightarrow \mu_A(x) \leq \alpha_A(x)), \forall x \in X. \quad (3)$$

Всі нечіткі множини в X , які задовольняють умови (3), складають систему нечітких реалізацій $R(\tilde{A})$ слабкої множини \tilde{A} .

Розглянемо можливі способи геометричної інтерпретації слабких множин та їх систем нечітких реалізацій. Відомо, що нечіткі множини в X мають геометричне зображення у вигляді графіка функції належності для випадку, коли $X \subseteq \mathbb{R}$, або $X \subseteq \mathbb{R}^2$, де \mathbb{R} — множина дійсних чисел. Було б зручно за цих же умов мати геометричну інтерпретацію слабких множин. Для цього випадку за умови, що $X \subseteq \mathbb{R}$, можна було б задавати позитивно напрямлені рівні належності додатними значеннями осі ординат, а негативно напрямлені — від'ємними значеннями цієї осі. Але для більш загального виду множини ненапрямлених рівнів належності $M_\alpha \subseteq \mathbb{R}$, коли до її складу увійдуть не тільки додатні, але й від'ємні числові значення, цей спосіб геометричного зображення слабких множин стане неприйнятним. Крім того упорядкованість чисел на числовій прямій, як ми бачили вище, збігається із упорядкованістю тільки позитивно напрямлених рівнів належності і не збігається з упорядкованістю негативно напрямлених. Тому для геометричного зображення функції рівнів слабкої множини далі пропонується використовувати два інших універсальніших способи.

На осі абсцис ми завжди будемо відкладати числові елементи універсума $X \subseteq \mathbb{R}$ згідно з їх природною упорядкованістю, а в ролі осі ординат в першому випадку використовувати звичайну вісь, яка буде утримувати значення ненапрямлених рівнів належності $\alpha(x)$, $x \in X$, упорядковані згідно зі строгим лінійним порядком S_α на M_α , а в другому — вісь напрямлених рівнів належності (див. рис. 2), на якій будуть відкладатись значення напрямлених рівнів належності $v(x)$, упорядковані згідно зі строгим лінійним порядком $S_{\alpha\omega}$ на $M_{\alpha\omega}$ (1).

Розглянемо перший спосіб геометричного зображення слабких множин детальніше. Враховуючи, що кожен елемент універсума може мати тільки дві напрямленості свого рівня належності слабкої множині, а перша координата α напрямленого рівня належності (α, ω) може набувати значень тільки із відрізка $[0; 1]$ незалежно від своєї напрямленості ω , будемо використовувати вісь ненапрямлених рівнів належності одночасно для зображення як позитивно, так і негативно напрямлених рівнів належності, зображаючи графік функції $\alpha(x)$ залежно від значення напрямленості $\omega(x)$ порізно. Розглянемо правила першого способу геометричного зображення слабких множин для двох випадків, коли універсум X має потужність континууму, та коли ця множина є дискретною. В обох випадках для геометричного зображення слабкої множини \tilde{A} в X будемо використовувати

графік її функції ненапрямлених рівнів належності α_A , використовуючи вісь абсцис для відображення елементів універсума, а вісь ординат — для значень ненапрямлених рівнів належності. У випадку континуального універсума X ту частину графіка, яка відповідає елементам універсума з позитивною напрямленістю рівнів належності, будемо зображати суцільною лінією, а ту, яка відповідає елементам з негативною напрямленістю — пунктирною. В точці переходу графіка із одного класу напрямленостей слабкої множини в інший будемо зображати стрілку, напрямлену в сторону відкритої границі класу. На рис. 3 за цими правилами наведено приклад геометричного зображення континуальної слабкої множини $\int_{x \in [0;4)} x | \alpha(x)^- + \int_{x \in [4;6]} x | \alpha(x)^+ + \int_{x \in (6;10]} x | \alpha(x)^-$ за умови, що $X = [0; 10]$. Надалі у випадку такого геометричного тлумачення слабкої множини будемо говорити, що слабка множина зображена в ненапрямлених або звичайних осях координат.

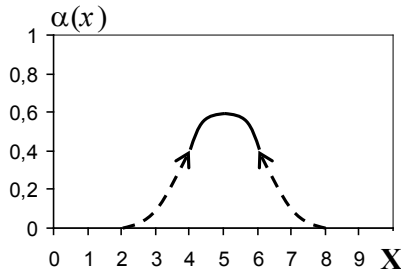


Рис. 3. Приклад геометричного зображення континуальної слабкої множини в декартових осях координат

Рис. 3. Пример геометрического изображения континуального слабого множества в декартовых осях координат

Fig. 3. Example of graphical representation of continuum poor set in Cartesian axes

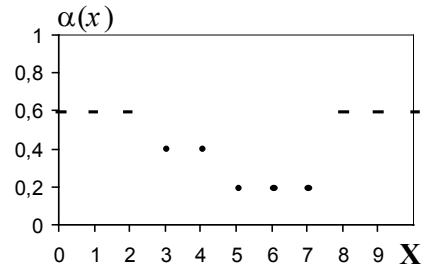


Рис. 4. Приклад геометричного зображення дискретної слабкої множини в декартових осях координат

Рис. 4. Пример геометрического изображения дискретного слабого множества в декартовых осях координат

Fig. 4. Example of graphical representation of discrete poor set in Cartesian axes

У випадку дискретності універсума X точки графіка, які відповідають елементам універсума з позитивною напрямленістю рівнів належності, будемо позначати крапкою, а точки, які відповідають елементам з негативною напрямленістю рівнів належності – тире. На рис. 4 у відповідності до цих правил наведено приклад скінченної слабкої множини $0 | 0,6^- + 1 | 0,6^- + 2 | 0,6^- + 3 | 0,4^+ + 4 | 0,4^+ + 5 | 0,2^+ + 6 | 0,2^+ + 7 | 0,2^+ + 8 | 0,6^- + 9 | 0,6^- + 10 | 0,6^-$ в $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

Тепер перейдемо до другого можливого способу геометричної інтерпретації слабких множин, згідно з яким в координатній системі для зображення графіка функції напрямлених рівнів $v(x)$ у ролі осі ординат буде використовуватись вісь напрямлених рівнів належності. По відношенню до такого способу геометричної інтерпретації слабких множин будемо говорити, що слабка множина зображена в **напрямлених осях координат**.

Для того, щоб підкреслити особливості негативно напрямлених рівнів належності та зберегти однотипність геометричного зображення слабких множин в напрямлених та звичайних осях координат, будемо зображати графік функції $v(x)$ в напрямлених осях координат для негативно напрямлених рівнів належності $\omega(x)$ за тими ж правилами, які ми обумовили для функції $\alpha(x)$ в звичайних декартових осях.

На рис. 5, 6 в напрямлених осях координат зображені ті ж самі слабкі множини, які були показані в ненапрямлених осях на рис. 3, 4.

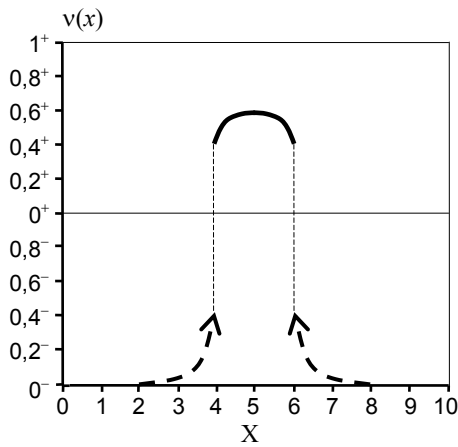


Рис. 5. Приклад геометричного зображення континуальної слабкої множини в напрямлених осях координат

Рис. 5. Пример геометрического изображения континуального слабого множества в направленных осях координат

Fig. 5. Example of graphical representation of continuum poor set in directional coordinate axes

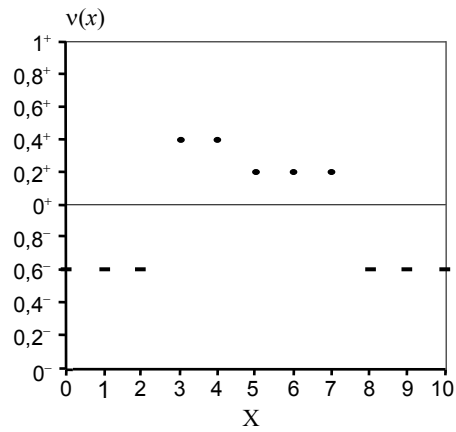


Рис. 6. Приклад геометричного зображення дискретної слабкої множини в напрямлених осях координат

Рис. 6. Пример геометрического изображения дискретного слабого множества в направленных осях координат

Fig. 6. Example of graphical representation of discrete poor set in directional coordinate axes

Як бачимо із рис. 5, графік напрямлених рівнів належності слабкої множини $\int_{x \in [0;4]} x | \alpha(x)^- + \int_{x \in [4;6]} x | \alpha(x)^+ + \int_{x \in (6;10]} x | \alpha(x)^-$ в напрямлених осях координат має розриви коли $x = 4$ та $x = 5$, які для випадку дійсної функції дійсного аргументу ми б назвали розривами першого роду. В той же час, в ненапрямлених осях ця слабка множина виглядає неперервною. Це пояснюється тим, що в звичайних декартових осях вісь ординат є фактично віссю ненапрямлених

рівнів належності, кожна точка якої може відповідати двом різним напрямленим рівням належності з одним і тим же значенням ненапрявленого рівня та протилежними значеннями напрямленості. Тому в цьому випадку ми фактично використовуємо замість графіка функції $v(x)$ графік функції $\alpha(x)$, і тільки спосіб зображення лінії графіка говорить про напрямленість відповідних рівнів належності. В той же час в напрямлених осях між множиною точок осі ординат та множиною напрямлених рівнів належності простору $M_{\alpha\omega}$ існує бієкція. Тому кожна точка осі ординат відповідає тільки одному напрямленому рівню належності і навпаки кожен окремий напрямлений рівень належності відповідає тільки одній точці осі ординат.

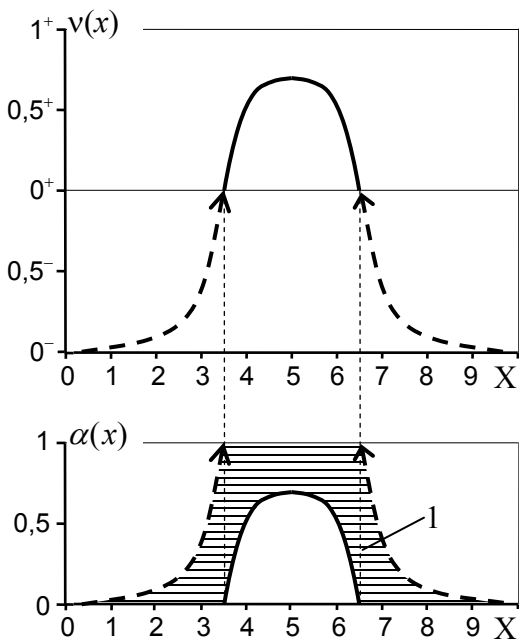


Рис. 7. Геометричне зображення слабкої множини в напрямлених та звичайних осях координат: 1 – зона реалізацій

Рис. 7. Геометрическое изображение слабого множества в направленных и обычных осях координат: 1 – зона реализаций

Fig. 7. Graphical representation of the poor set in directional and usual coordinate axes: 1 – zone of realizations

З допомогою рис. 7 ми можемо також пересвідчитись в тому, що геометричне зображення слабкої множини \tilde{A} в $X = [0; 10]$, яке виглядає неперервним в напрямлених осях, має розриви в звичайних осях координат. На цьому ж рисунку показана геометрична інтерпретація системи нечітких реалізацій слабкої множини, як множини точок в ненапрямлених осях координат, які задовольняють умови (3). Таку множину точок будемо називати **зоною реалізацій** слабкої множини.

Доцільно використовувати обидва запропоновані вище способи геометричного зображення слабких

множин, вибираючи один із них залежно від умов задачі, яка буде розв'язуватись, або той, в якому це зображення буде сприйматись простіше. Вибір виду осей може залежати зокрема від того, як в них виглядатиме геометричне зображення слабкої множини: розривним чи неперервним. Крім того, якщо виникне необхідність в одних осях разом із слабкими множинами зображати також нечіткі множини, то очевидно, що це доцільніше робити в ненапрямлених осях, в яких останні будуть мати звичайне зображення. Особливо це стосується випадку, коли разом з геометричним зображенням слабкої множини необхідно показати одну або декілька її нечітких реалізацій або зону всіх її реалізацій.

Зауважимо також, що обидва запропоновані способи геометричного зображення слабких множин можна очевидно використовувати у випадку коли $X \subseteq \mathbb{R}^2$. При цьому для зображення елементів універсума повинні використовуватись дві звичайні осі координат, а в ролі третьої осі, залежно від вибраного способу геометричного зображення, необхідно використати відповідно ненапрямлену або напрямлену вісь координат.

Слабые множества и их геометрическая интерпретация

Понятие слабого множества, впервые введено авторами в [2], а в [3] показано как можно использовать слабые множества для моделирования неопределенных параметров сложных систем. Слабое множество есть более общей и универсальной математической конструкцией в сравнении с нечетким множеством. Для его формализации сначала введены понятия: **пространства ненаправленных уровней принадлежности** M_α (в отличие от степеней принадлежности в теории нечетких множеств), как множества, которое содержит наименьший $\min M_\alpha$ и наибольший $\max M_\alpha$ элементы относительно некоторого, заданного в нём, нестроого линейного порядка D_α ; **направленности**, как свойства уровня принадлежности, которое может принимать одно из двух возможных значений из **множества направленностей уровней принадлежности** $M_\omega = \{+, -\}$, на котором задан нестрогий линейный порядок D_ω такой, что $D_\omega = \{(+, +), (+, -), (-, -)\}$; **пространства направленных уровней принадлежности** $M_{\alpha\omega}$, как множества $M_{\alpha\omega} = M_\alpha \times M_\omega \setminus \{(\max M_\alpha; \min M_\omega)\}$ с заданным на ней бинарным отношением строгого совершенного порядка $S_{\alpha\omega}$ таким, что (1).

Диагональные отношения E_α , E_ω , $E_{\alpha\omega}$ на M_α , M_ω , $M_{\alpha\omega}$ приняты за отношения равенства элементов соответствующих множеств, а их дополнения – за соответствующие отношения неравенства. Отношения $S_\alpha = D_\alpha \setminus E_\alpha$, $S_\omega = D_\omega \setminus E_\omega$ и $D_{\alpha\omega} = S_{\alpha\omega} \cup E_{\alpha\omega}$ приняты за отношения строгого порядка на множествах M_α , M_ω и нестроогого порядка на $M_{\alpha\omega}$, что естественно для теории бинарных отношений. Элементы множества $M_{\alpha\omega}$ являются упорядоченными парами (α, ω) , $\alpha \in M_\alpha$, $\omega \in M_\omega$, для которых вводится также более простое и удобное обозначение α^ω . В случае известного значения направленностей (например $\omega = +$ и $\psi = -$) будем также писать $(\alpha, +)$, $(\beta, -)$ или α^+ , β^- и называть уровень α^+ положительно направленным, а уровень β^- – отрицательно направленным.

В простейшем случае используется пространство ненаправленных уровней $M_\alpha = [0; 1]$ с заданными на нём естественными отношениями порядка \geq , $>$ и обратными к ним \leq , $<$, а также диагональным отношением $=$ и его дополнением \neq . В этом случае $M_{\alpha\omega} = [0; 1] \times \{+, -\} \setminus \{(1; -)\}$. Для удобства отношения S_ω , D_ω , E_ω , \bar{E}_ω на множестве $M_\omega = \{+, -\}$, а также отношения $S_{\alpha\omega}$, $D_{\alpha\omega}$, $E_{\alpha\omega}$, $\bar{E}_{\alpha\omega}$ на множестве $M_{\alpha\omega}$ будем обозначать одинаково с помощью знаков $>$, \geq , $=$, \neq , аналогично соответствующим отношениям на множестве действительных чисел, а отношения, обратные к отношениям S_ω , $S_{\alpha\omega}$ и D_ω , $D_{\alpha\omega}$, – соответственно знаками $<$, \leq .

Чтобы получить геометрическое изображение декартового произведения $M_\alpha \times M_\omega$ используем декартовы оси координат. По оси абсцисс отложим пространство ненаправленных уровней принадлежности $M_\alpha = [0; 1]$, а по оси ординат – снизу вверх два элемента пространства направленностей в порядке их возрастания согласно строгому линейному порядку S_ω на M_ω (1). В таком случае пространство направленных уровней принадлежности $M_{\alpha\omega}$, состоящее из упорядоченных

пар (α, ω) , $\alpha \in M_\alpha$, $\omega \in M_\omega$ и не содержащее пары $(1; +)$, будет изображаться всеми точками отрезка прямой, расположенного на уровне направленности $+$ и внутренними и левой предельной точками отрезка, расположенного на уровне отрицательной направленности (рис. 1).

Предельные точки верхнего отрезка на этом рисунке отвечают точкам $(\min M_\alpha; +)$ и $(\max M_\alpha, +)$ пространства $M_{\alpha\omega}$. Правая предельная точка нижнего отрезка не входит в пространство $M_{\alpha\omega}$ (об этом говорит стрелка с правой стороны этого отрезка), а левая граница этого отрезка отвечает точке $(\min M_\alpha; -)$ пространства $M_{\alpha\omega}$. Направление возрастания значений направленных уровней принадлежности согласно строгому линейному порядку $S_{\alpha\omega}$ на $M_{\alpha\omega}$ показано на рисунке пунктирными стрелками.

Введем понятие **оси направленных уровней принадлежности**, как единого отрезка прямой, точки которого взаимно однозначно отвечают всем элементам пространства $M_{\alpha\omega}$ и упорядочены слева на право согласно строгому линейному порядку $S_{\alpha\omega}$ на $M_{\alpha\omega}$. Из рис. 1 видно, что изображенный на этом рисунке нижний отрезок без правой предельной точки и верхний отрезок с обеими предельными точками можно соединить непрерывно так, что левая граница верхнего отрезка, которая отвечает точке $\min M_\alpha^+ = 0^+$, станет одновременно правой предельной точкой нижнего отрезка. В результате мы получим ось направленных уровней принадлежности (рис. 2). Направление возрастания значений направленных уровней принадлежности согласно строгому линейному порядку $S_{\alpha\omega}$ на $M_{\alpha\omega}$ показано на рисунке пунктирной стрелкой.

Слабым множеством \tilde{A} в универсуме X в [1] названо множество упорядоченных пар $\{(x, v_A(x)) \mid x \in X, v_A: X \rightarrow M_{\alpha\omega}\}$, а векторную функцию v_A – функцией направленных уровней принадлежности, или просто **функцией уровней** слабого множества \tilde{A} . Функцию уровней произвольного слабого множества \tilde{A} можно представить в виде пары функций $\alpha_A: X \rightarrow M_\alpha$, $\omega_A: X \rightarrow M_\omega$ таких, что (2).

Первую функцию пары α_A , которая ставит в соответствие каждому элементу универсума X некоторый ненаправленный уровень принадлежности, будем называть **функцией ненаправленных уровней** слабого множества \tilde{A} , а другую функцию пары ω_A , которая задает тем самым элементам направленность их уровней принадлежности – **функцией направленностей** слабого множества \tilde{A} . Таким образом функцию уровней слабого множества \tilde{A} можно представить в векторном виде, как функцию v_A , или в координатном — как пару функций (α_A, ω_A) .

Между слабыми и нечеткими множествами можно установить связь, если принять, что сформированное в некотором универсуме слабое множество определяет для каждого элемента универсума одностороннюю границу возможных значений его степени принадлежности еще не сформированному в этом универсуме нечеткому множеству. При этом положительно направленные уровни принадлежности задают минимально возможные значения степеней принадлежности, а отрицательно направленные – их максимально возможные значения. Согласно такой интерпретации направленных уровней принадлежности в [3] введено понятие реализации слабого множества. Реализацией слабого множества \tilde{A} в X названо нечеткое множество \tilde{A} в X , функция принадлежности $\mu_A: X \rightarrow M_\alpha$ которой удовлетворяет условиям (3).

Все нечеткие множества в X , которые удовлетворяют условиям (3) составляют систему нечетких реализаций $R(\tilde{A})$ слабого множества \tilde{A} .

Рассмотрим возможные способы геометрической интерпретации слабых множеств и их систем нечетких реализаций. Известно, что нечеткие множества в X имеют геометрическое изображение в виде графика функции принадлежности для случая, когда $X \subseteq R$, или $X \subseteq R^2$, где R – множество действительных чисел. Было бы удобно при этих же условиях иметь геометрическую интерпретацию слабых множеств. Для этого случая при условии, что $X \subseteq R$, можно было бы задавать положительно направленные уровни принадлежности положительными значениями оси ординат, а отрицательно направленные – отрицательными значениями этой оси. Но для более общего вида множества ненаправленных уровней принадлежности $M_\alpha \subseteq R$, когда в её состав войдут не только положительные, но и отрицательные числовые значения, этот способ геометрического изображения слабых множеств станет неприемлемым. Кроме того упорядоченность чисел на числовой прямой, как мы видели выше, совпадает с упорядоченностью только положительно на-

правленних рівней приналежності і не збігається з упорядоченістю отрицательно направлених. Поэтому для геометрического изображения функции уровней слабого множества дальше предлагается использовать два других более универсальных способа.

На оси абсцисс мы всегда будем откладывать числовые элементы универсума $X \subseteq \mathbb{R}$ согласно их естественной упорядоченности, а в роли оси ординат в первом случае использовать обычную ось, которая будет содержать значения ненаправленных уровней принадлежности $\alpha(x)$, $x \in X$, упорядоченные согласно строгому линейному порядку S_α на M_α , а во втором – ось направленных уровней принадлежности (рис. 2), на которой будут откладываться значения направленных уровней принадлежности $v(x)$, упорядоченные согласно строгому линейному порядку $S_{\alpha\omega}$ на $M_{\alpha\omega}$ (1).

Рассмотрим первый способ геометрического изображения слабых множеств более детально. Учитывая, что каждый элемент универсума может иметь только две направленности своего уровня принадлежности слабому множеству, а первая координата α направленного уровня принадлежности (α, ω) может принимать значения только из отрезка $[0; 1]$ независимо от своей направленности ω , будем использовать ось ненаправленных уровней принадлежности одновременно для изображения как положительно, так и отрицательно направленных уровней принадлежности, изображая график функции $\alpha(x)$ в зависимости от значения направленности $\omega(x)$ по-разному. Рассмотрим правила первого способа геометрического изображения слабых множеств для двух случаев, когда универсум X имеет мощность континуума, и когда это множество дискретно. В обоих случаях для геометрического изображения слабого множества \tilde{A} в X будем использовать график ее функции ненаправленных уровней принадлежности α_A , используя ось абсцисс для отображения элементов универсума, а ось ординат – для значений ненаправленных уровней принадлежности. В случае континуального универсума X ту часть графика, которая отвечает элементам универсума с положительной направленностью уровней принадлежности, будем изображать сплошной линией, а ту, которая отвечает элементам с отрицательной направленностью – пунктирной. В точке перехода графика из одного класса направленностей слабого множества в другой будем изображать стрелку, направленную в сторону открытой границы класса. На рис. 3 согласно этим правилам приведен пример геометрического изображения континуального слабого множества $\int_{x \in [0;4)} x |\alpha(x)^- + \int_{x \in [4;6]} x |\alpha(x)^+ + \int_{x \in (6;10]} x |\alpha(x)^-$ при $X = [0; 10]$. В дальнейшем

в случае такого геометрического толкования слабого множества будем говорить, что слабое множество изображено в ненаправленных или обычных осях координат.

В случае дискретности универсума X точки графика, которые отвечают элементам универсума с положительной направленностью уровней принадлежности, будем обозначать точкой, а точки, которые отвечают элементам с отрицательной направленностью уровней принадлежности – тире. На рис. 4 в соответствии с этими правилами приведен пример конечного слабого множества $0 | 0,6^- + 1 | 0,6^- + 2 | 0,6^- + 3 | 0,4^+ + 4 | 0,4^+ + 5 | 0,2^+ + 6 | 0,2^+ + 7 | 0,2^+ + 8 | 0,6^- + 9 | 0,6^- + 10 | 0,6^-$ в $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

Теперь перейдем ко второму возможному способу геометрической интерпретации слабых множеств, согласно которому в координатной системе для изображения графика функции направленных уровней $v(x)$ слабого множества в роли оси ординат будет использоваться ось направленных уровней принадлежности. По отношению к такому способу геометрической интерпретации слабых множеств будем говорить, что слабое множество изображено в **направленных осях координат**.

Для того, чтобы подчеркнуть особенности отрицательно направленных уровней принадлежности и сохранить однотипность геометрического изображения слабых множеств в направленных и обычных осях координат, будем изображать график функции $v(x)$ в направленных осях координат для отрицательно направленных уровней принадлежности $\omega(x)$ по тем же правилам, которые мы приняли для функции $\alpha(x)$ в обычных декартовых осях.

На рис. 5, 6 в направленных осях координат изображены те же самые слабые множества, которые были показаны в ненаправленных осях на рис. 3, 4.

Как видим из рис. 5, график направленных уровней принадлежности слабого множества $\int_{x \in [0;4)} x |\alpha(x)^- + \int_{x \in [4;6]} x |\alpha(x)^+ + \int_{x \in (6;10]} x |\alpha(x)^-$ в направленных осях координат имеет разрывы при $x = 4$ и $x = 5$, которые для случая действительной функции действительного аргумента мы бы назвали разрывами первого рода. В тот же время, в ненаправленных осях это слабое множество выглядит непрерывным. Это объясняется тем, что в обычных декартовых осях ось ординат есть

фактичною осью ненаправленних уровней принадлежности, каждая точка которой может отвечать двум разным направленным уровням принадлежности с одним и тем же значением ненаправленного уровня и противоположными значениями направленности. Поэтому в этом случае мы фактически используем вместо графика функции $v(x)$ график функции $\alpha(x)$, и только способ изображения линии графика говорит о направленности соответствующих уровней принадлежности. В тот же время в направленных осях между множеством точек оси ординат и множеством направленных уровней принадлежности пространства $M_{\alpha\omega}$ существует биекция. Поэтому каждая точка оси ординат отвечает только одному направленному уровню принадлежности и наоборот каждый отдельный направленный уровень принадлежности отвечает только одной точке оси ординат.

С помощью рис. 7 мы можем также убедиться в том, что геометрическое изображение слабого множества \tilde{A} в $X = [0; 10]$, которое выглядит непрерывным в направленных осях, имеет разрывы в обычных осях координат. На этом же рисунке показана геометрическая интерпретация системы нечетких реализаций слабого множества, как множества точек в ненаправленных осях координат, которые удовлетворяют условиям (3). Такое множество точек будем называть **зоной реализаций** слабого множества.

Целесообразно использовать оба предложенные выше способа геометрического изображения слабых множеств, выбирая один из них в зависимости от условий задачи, которая будет решаться, или тот, в котором это изображение будет восприниматься проще. Выбор вида осей может зависеть в частности от того, как в них будет выглядеть геометрическое изображение слабого множества: разрывным или непрерывным. Кроме того, если возникнет необходимость в одних осях вместе со слабыми множествами изображать также нечеткие множества, то очевидно, что это целесообразнее делать в ненаправленных осях, в которых последние будут иметь обычное изображение. Особенно это касается случая, когда вместе с геометрическим изображением слабого множества необходимо показать одну или несколько его нечетких реализаций или зону всех его реализаций.

Заметим также, что оба предложенные способа геометрического изображения слабых множеств можно очевидно использовать в случае когда $X \subseteq R^2$. При этом для изображения элементов универсума должны использоваться две обычные оси координат, а в роли третьей оси, в зависимости от выбранного способа геометрического изображения, необходимо использовать соответственно ненаправленную или направленную ось координат.

Poor sets and their geometrical interpretation

The notion of poor set was introduced by the authors for the first time in [6]. In [7] is shown how to apply the poor sets for the simulation of the indetermined parameters of complex systems. Poor set is more general and universal mathematical construction in comparison with the fuzzy set. To formalize a poor set, the following concepts were introduced: **space of non-directional levels of membership** M_α (in contrast to the grades of membership in the theory of fuzzy sets) as a set which contains minimal $\min M_\alpha$ and maximal $\max M_\alpha$ elements relatively to some linear order D_α predefined on this set; **directivity** as a property of level of membership which can take one of two possible values from the space of directions of membership levels $M_\omega = \{+, -\}$ on which the non-rigorous linear order D_ω is determined, when $D_\omega = \{(+, +), (+, -), (-, -)\}$; **space of directional levels of membership** $M_{\alpha\omega}$ as a set $M_{\alpha\omega} = M_\alpha \times M_\omega \setminus \{(\max M_\alpha; \min M_\omega)\}$ with the determined binary relation of rigorous perfect order $S_{\alpha\omega}$ for which (1).

Diagonal relations $E_\alpha, E_\omega, E_{\alpha\omega}$ на $M_\alpha, M_\omega, M_{\alpha\omega}$ are accepted as the relations of the elements' equality of the corresponding sets, and their complements – as corresponding relations of inequality. Relations $S_\alpha = D_\alpha \setminus E_\alpha, S_\omega = D_\omega \setminus E_\omega$ and $D_{\alpha\omega} = S_{\alpha\omega} \cup E_{\alpha\omega}$ are accepted as the relations of rigorous order on sets M_α, M_ω and non-rigorous order on set $M_{\alpha\omega}$ correspondingly which is natural for the theory of binary relations. Elements of set $M_{\alpha\omega}$ are ordered pairs $(\alpha, \omega), \alpha \in M_\alpha, \omega \in M_\omega$, for which more simple and convenient notation α^ω is introduced. In case of known values of directions (for example $\omega = +$ та $\psi = -$) we will write $(\alpha, +), (\beta, -)$ or α^+, β^- and call level α^+ a positively directed and level β^- – negatively directed.

In the most simple case, the space of non-directional levels $M_\alpha = [0; 1]$ with the defined on it

natural relations of order \geq , $>$ and opposite to them \leq , $<$, and also diagonal relation $=$ and its complement \neq are used. In this case $M_{\alpha\omega} = [0; 1] \times \{+, -\} \setminus \{(1; -)\}$.

For convenience, we will denote the relations S_ω , D_ω , E_ω , \bar{E}_ω on the set $M_\omega = \{+, -\}$, and also the relations $S_{\alpha\omega}$, $D_{\alpha\omega}$, $E_{\alpha\omega}$, $\bar{E}_{\alpha\omega}$ on the set $M_{\alpha\omega}$ equally and analogously to the corresponding relations on the set of real numbers with the help of signs $>$, \geq , $=$, \neq . Relations, inverse to the relations S_ω , $S_{\alpha\omega}$ and D_ω , $D_{\alpha\omega}$ we will denote with the help of signs $<$, \leq correspondingly.

To find the geometrical representation of the Cartesian product $M_\alpha \times M_\omega$ we will use the Cartesian coordinate axes. Along the axis of abscissas we will set the space of non-directional levels of membership $M_\alpha = [0; 1]$ and along axis of ordinates – from bottom to top two elements of space of directions in ascending order according to the rigorous linear order S_ω on M_ω (1). In this case the space of directional levels of membership $M_{\alpha\omega}$ which consists of ordered pairs (α, ω) , $\alpha \in M_\alpha$, $\omega \in M_\omega$ and do not holds pair $(1; +)$, will be represented by all points of the line segment on the level of direction $+$ and all inner and leftmost points of line segment on the level of negative direction (Fig. 1).

Limiting points of upper line segment on this figure correspond to the points $(\min M_\alpha; +)$ and $(\max M_\alpha, +)$ of space $M_{\alpha\omega}$. Rightmost point of the bottom line segment does not belong to the space $M_{\alpha\omega}$ (this is denoted by the arrow on the right side of this line segment) and leftmost boundary of this point corresponds to the point $(\min M_\alpha; -)$ of space $M_{\alpha\omega}$. Direction of growth of the values of directional levels of membership according to the rigorous linear order $S_{\alpha\omega}$ on $M_{\alpha\omega}$ is denoted on the figure by the dotted arrows.

We introduce the notion of axis of the directed levels of membership, as the unique line segment, the points of which one-for-one answer all the space elements $M_{\alpha\omega}$ and are ordered from the left to the right, following the strict linear order $S_{\alpha\omega}$ on $M_{\alpha\omega}$. Fig. 1 shows that the lower section without the right limiting point, and the upper section with both limiting points can be connected continuously, and the left boundary of the upper section, which answers to the point $\min M = 0$ will simultaneously be the right limiting point of the low section. In the result we get the axis of the directed levels of membership (Fig. 2). Direction of growth of the values of directional levels of membership according to the rigorous linear order $S_{\alpha\omega}$ on $M_{\alpha\omega}$ is denoted on the figure by the dotted arrows.

In [1] the set of ordered pairs $\{(x, v_A(x)) \mid x \in X, v_A: X \rightarrow M_{\alpha\omega}\}$ is called a **poor set** \tilde{A} inside the universe X and vector function v_A is called a function of directional levels of membership or simply **function of levels** of poor set \tilde{A} . Function of levels of the arbitrary poor set \tilde{A} can be represented by the pair of functions $\alpha_A: X \rightarrow M_\alpha$, $\omega_A: X \rightarrow M_\omega$ for which (2).

The first function of the pair α_A which for each element of universe X brings in correspondence some non-directional level of membership, we will call a **function of non-directional levels** of poor set \tilde{A} . The second function of pair ω_A assigns for the same elements direction of their levels of membership. We will call this function a **function of directions** of poor set \tilde{A} . Thus function of levels of poor set \tilde{A} can be represented in vector form as a function v_A or in coordinate form as a pair of function (α_A, ω_A) .

A connection can be established between poor and fuzzy sets, assuming that the poor set, formed in some universe define for each element of universe single-sided boundary of possible values of its level of membership to the non-formed yet in this universe fuzzy set. The positively directed levels of membership determine minimal possible values of levels of membership and negatively directed – their maximal possible values. According to such interpretation of directional levels of membership, there had been introduced a conception of realization of poor set [3]. Poor set \tilde{A} in X which membership function $\mu_A: X \rightarrow M_\alpha$ satisfies the conditions (3) is called realization of poor set \tilde{A} in X .

All fuzzy sets in X , which satisfy conditions (3), form system of fuzzy realizations $R(\tilde{A})$ of poor set \tilde{A} .

Let's consider the possible ways of geometrical interpretation of poor sets and their systems of

fuzzy realizations. It is known that fuzzy sets in X have geometrical representation in the form of membership function graphic when $X \subseteq \mathbb{R}$, or $X \subseteq \mathbb{R}^2$, where \mathbb{R} — set of real numbers. It would be convenient to have a geometrical interpretation of poor set under the same conditions. In this case under condition that $X \subseteq \mathbb{R}$ it is possible to specify positively directed levels of membership using positive values of ordinate axis and negatively directed – using negative values of this axis. But in case of more general form of set of non-directional levels of membership $M_\alpha \subseteq \mathbb{R}$, when it contains not only positive but also negative numerical values this method of geometrical representation of poor sets will become unacceptable. Besides as we have seen above ordering of numbers on the numerical axis coincides only with ordering of positively directed levels of membership and do not coincide with ordering of negatively directed ones. Because of that two other more universal methods of geometrical representation of functions of levels of poor sets are proposed. Along axis of abscissas we will always measure the numerical elements of universe $X \subseteq \mathbb{R}$ according to their natural order and use in the first case in the role of axis of ordinates a usual axis which will hold values of non-directional levels of membership $\alpha(x)$, $x \in X$ ordered according to the rigorous linear order S_α on M_α . In the second case in the role of axis of ordinates we will use axis of directed levels of membership (Fig. 2), along which we will lay off values of directed levels of membership $v(x)$ ordered according with rigorous linear order $S_{\alpha\omega}$ on $M_{\alpha\omega}$ (1).

Let's consider the first method of geometrical representation of poor sets in more details. Taking into account that each elements of universe can have only two directions of its level of membership to poor set and that first coordinate α of directed level of membership (α, ω) can take its values only from segment $[0; 1]$ independently of its direction ω , we will use axis of non-directional levels of membership simultaneously for representation of both positively and negatively directed levels of membership drawing graph of function $\alpha(x)$ differently depending on value of direction $\omega(x)$. Lets consider the rules of the first method of geometrical representation of poor sets for two cases: when universe X has power of continuum and this set is discrete. In both cases to geometrically represent poor set \tilde{A} in X we will use graph of its function of non-directional levels of membership α_A . We will also use the axis of abscissas to measure the elements of universe and axis of ordinates – measure the values of non-directional levels of membership. In case of continuous universe X we will represent with a solid line part of the graph which corresponds to the elements of universe with positive direction of levels of membership and with a dotted line – part which corresponds to the elements with negative direction. In the point of transition of graph from one class of directions of poor sets into the other we will show arrow, directed towards the side of the open set boundary. According to those rules example of geometrical representation of the poor set $\int_{x \in [0;4)} x | \alpha(x)^- + \int_{x \in [4;6]} x | \alpha(x)^+ + \int_{x \in (6;10]} x | \alpha(x)^-$ provided that $X = [0; 10]$ is shown in

Fig. 3. From this point on in case of such geometrical interpretation of poor set we will say that poor set is shown in non-directional or usual coordinate axes.

In case of discrete universe X points of the graph which correspond to the elements of universe with positive direction of levels of membership we will designate with dot, and points which corresponds to elements with negative levels of membership — with dash. In Fig. 4 according to this rules an example of finite poor set $0 | 0,6^- + 1 | 0,6^- + 2 | 0,6^- + 3 | 0,4^+ + 4 | 0,4^+ + 5 | 0,2^+ + 6 | 0,2^+ + 7 | 0,2^+ + 8 | 0,6^- + 9 | 0,6^- + 10 | 0,6^-$ в $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ is shown.

Now let's proceed to the second possible method of geometrical interpretation of poor sets according to which in the role of axis of ordinates axis of directional levels of membership will be used in the coordinate system for representation of graph of function of directional levels $v(x)$ of poor set. We will say that poor set is shown in directional coordinate axes against such method of geometrical interpretation of poor sets.

To emphasize distinctive features of negatively directed levels of membership and retain uniformity of geometrical representation of poor sets in directional and non-directional coordinate axes we will represent graph of a function $v(x)$ in directional coordinate axes for negatively directed levels of membership $\omega(x)$ according to the same rules that were described for function $\alpha(x)$ in non-directional axes.

The same poor sets that were shown in the non-directional axes in Fig. 3, 4 are shown in directional axes in Fig. 5, 6.

As is seen from Fig.5 graph of directional levels of membership of poor set

$$\int_{x \in [0;4)} x |\alpha(x)^- + \int_{x \in [4;6]} x |\alpha(x)^+ + \int_{x \in (6;10]} x |\alpha(x)^-$$

at $x = 4$ and $x = 5$, which we would call discontinuity of the first kind in the case of real function of real argument. At the same time in the non-directional axes this poor set looks continuous. This is explained by the fact that in usual Cartesian axes axis of ordinates is in fact an axis of non-directional levels of membership each point of which can correspond to the two different directional levels of membership with the same value of non-directional level and opposite values of direction. Because of that in this case we in fact use instead of graph of function $v(x)$ graph of function $\alpha(x)$, and only manner of representation of graph line says about direction of corresponding levels of membership. At the same time there is a bijective correspondence between the set of points of axis of ordinates and the set of directional levels of membership of space $M_{\alpha\omega}$ in directional axes. Because of that each point of axis of ordinate corresponds to single directed level of membership and vice versa, each separate directional level of membership corresponds only to single point of axis of ordinates.

With the help of Fig. 7 we can make sure that geometrical representation of a poor set \tilde{A} in $[0; 10]$ that looks continuous in directional axes has discontinuity in non-directional axes. The same figure shows geometrical interpretation of system of fuzzy realisations of poor set as set of points in non-directional coordinate axes that satisfy condition (3). We will call such set of points **realization zone** of poor set.

It is appropriate to use the above suggested methods of geometrical representation of poor sets choosing one of them according to conditions of the problem which is being solved or choosing the one which makes perception of poor set more simple. Choice of axes' kind can in particular depend on either it will allow a geometrical representation of poor set to be continuous or discontinuous. Besides when required to show in same axes both poor and fuzzy sets the choice is obviously for the non-directional axes which allows a fuzzy sets to have usual representation. This concerns especially in the case when together with geometrical representation of a poor set one or several fuzzy realizations of it or its realization zone must be shown.

It is also necessary to mention that both suggested methods of geometrical representation of poor sets can obviously be used in case when $X \subseteq R^2$. In this case both axes for coordinates of elements from X must remain usual and in the role of the third coordinate axis directional or non-directional coordinate axis must be used according to selected method of geometrical representation.

Висновки

Введено поняття осі напрямлених рівнів належності, як геометричної інтерпретації простору напрямлених рівнів належності слабких множин. Запропоновано два зручних для використання способи геометричного зображення слабких множин. В одному з цих способів використовується вісь напрямлених рівнів належності, яка враховує особливості бінарних відношень порядку в просторі напрямлених рівнів належності. Тому цей спосіб є найприроднішим для слабких множин.

Показано, як можна зображати слабкі множини в звичайних декартових осях координат. Цей спосіб зображення є особливо доцільним, коли виникає необхідність показати в одних осях одночасно слабкі та нечіткі множини, зокрема нечіткі реалізації, або зону нечітких реалізацій слабкої множини.

Введені геометричні зображення слабких множин спрощують та полегшують сприйняття, розуміння та використання теорії слабких множин, як нового універсальнішого засобу моделювання складних систем в умовах невизначеності даних.

Выводы

Введено понятие оси направленных уровней принадлежности, как геометрической интерпретации пространства направленных уровней принадлежности слабых множеств. Предложено два удобных для использования способа геометрического изображения слабых множеств. В одном из этих способов используется ось направленных уровней принадлежности, которая учитывает особенности бинарных отношений порядка в пространстве направленных уровней принадлежности. Поэтому этот способ является наиболее естественным для слабых множеств.

Показано, как можно изображать слабые множества в обычных декартовых осях координат. Этот способ изображения особенно целесообразен, когда возникает необходимость показать в одних осях одновременно слабые и нечеткие множества, в частности нечеткие реализации, или

зону нечетких реализаций слабого множества.

Введенные геометрические изображения слабых множеств упрощают и облегчают восприятие, понимание и использование теории слабых множеств, как нового более универсального средства моделирования сложных систем в условиях неопределенности данных.

Conclusions

The concept of axis of directional levels of membership as the geometrical interpretation of space of directional levels of membership has been introduced. Two convenient methods of geometrical representation of poor sets are suggested. One of the methods uses axis of directional levels of membership which takes into account the distinctive features of binary order relations in space of directional levels of membership of poor sets. That is why the method is more natural for poor sets.

Method of representation of fuzzy sets in usual Cartesian axes is shown. This method is especially appropriate in case when both poor and fuzzy sets must be shown in the same axes.

The suggested geometrical representations of poor sets simplify the perception, comprehension and usage of the poor sets theory as a new more universal means of simulation of complex systems under conditions of data indeterminacy.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

PREFERENCES

1. Мокін Б. І., Камінський В. В. Слабкі множини та їх застосування до розв'язання задач прийняття рішень в умовах невизначеності даних // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2004. — № 3. — С. 102—108.

2. Мокін Б. І., Камінський В. В. Математичне моделювання процесів пошуку оптимальних рішень з використанням слабо заданих вхідних параметрів. // Матеріали сьомої міжнародної науково-технічної конференції «Контроль і управління в складних системах (КУСС—2003)», м. Вінниця, 8—11 жовтня 2003 року. — Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця. — 2003. — С. 7—10.

3. Мокін Б. І., Камінський В. В. Математичне моделювання невизначених параметрів режиму електромереж з допомогою слабких множин // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2005. — № 6. — С. 89—96.

4. Мокін Б. И., Каминский В. В. Основы теории слабых множеств и её прикладные аспекты // Материалы 12-й международной конференции по автоматическому управлению (Автоматика-2005), г. Харьков, 30 мая — 3 июня 2005 г.: в 3-х т. — Харьков: Изд-во НТУ «ХПИ». — 2005. — Т. 1. — С. 22—23.

Рекомендована кафедрою електротехнічних систем електроспоживання та енергозбереження

Надійшла до редакції 22.06.06

Рекомендована до друку 29.06.06

Мокін Борис Іванович — професор кафедри моделювання та моніторинга складних систем, **Камінський Вячеслав Вікторович** — старший викладач кафедри електротехнічних систем електроспоживання та енергозбереження.

Вінницький національний технічний університет

Мокін Борис Іванович — профессор кафедры моделирования и мониторинга сложных систем, **Каминский Вячеслав Викторович** — старший преподаватель кафедры электротехнических систем электропотребления и энергосбережения

Винницкий национальный технический университет

Boris Mokin — Professor of the Chair of Modeling and Monitoring of Complex Systems, **Viacheslav Kaminsky** — the senior lecturer of the Chair of Electrotechnical Systems of Energy Consumption and Saving.

Vinnitsia National Technical University