УДК 62-52

Н. А. Денисенко, асп.;
А. И. Рогачёв, д. т. н., проф.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПРОГНОЗИРОВАНИЕМ ПРИ КВАДРАТИЧНОМ ФУНКЦИОНАЛЕ

Приведен метод управления динамическими системами с применением прогнозирующих моделей, и показано его практическое применение для решения конкретных примеров систем, которые заданы дифференциальными уравнениями.

Одним из современных методов анализа и синтеза систем управления, базирующихся на математических методах оптимизации, является теория управления динамическими объектами с использованием прогнозирующих моделей — Model Predictive Control (MPC) [1]. Указанный метод начал развиваться в 60—70-х годах прошлого века для управления процессами и оборудованием в различных энергетических производствах, для которых применение традиционных методов синтеза было крайне затруднено в связи с исключительной сложностью их математических моделей. В настоящее время сфера применения этих методов существенно расширилась и охватывает такие отрасли как химическую, аэрокосмическую, легкую промышленности и т. д.

Основным достоинством MPC-подхода, определяющим его успешное использование в практике построения и эксплуатации систем управления, служит относительная простота базовой схемы формирования обратной связи, сочетающаяся с высокими адаптивными свойствами. Последнее обстоятельство позволяет управлять многомерными и многосвязными объектами со сложной структурой, включающей нелинейности, оптимизировать процессы в режиме реального времени в рамках ограничений на управляющие и управляемые переменные, учитывать неопределенности в задании объектов и возмущений. Кроме того, возможен учет транспортного запаздывания, учет изменений критериев качества в ходе процесса и отказов датчиков системы измерения.

В работе [2] рассмотрен метод управления динамической системой с использованием прогнозирующих моделей. Целью настоящей статьи является разработка алгоритма управления на базе прогнозирующих моделей и его структурной схемы. Математической моделью объекта управления служит система дифференциальных уравнений вида

$$\dot{\overline{x}}(t) = f\left(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)\right); \;\; x(0) = x_0. \tag{1}$$

Будем считать, что целью управления объектом (1) является обеспечение выполнения равенств

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\overline{x}(t) - \overline{r_x}(t)\right\| = 0; \;\; \lim_{t\to\infty}\left\|\overline{u}(t) - \overline{r_u}(t)\right\| = 0\,, \tag{2}$$

где векторные функции $r_x(t)$; $r_u(t)$ определяют некоторое желаемое движение объекта.

Зададим некоторый функционал на управляемых движениях объекта (1)

$$J = J\left(\overline{x}(t), \overline{u}(t)\right). \tag{3}$$

Тогда задача оптимального управления состоит в поиске такого управляющего воздействия из некоторого заданного класса, обеспечивающее соблюдение (2) и доставляет минимум функционалу (3).

Наряду с (1) будем рассматривать систему дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{\overline{x}}(\tau) = f\left(\tau, \overline{x}(\tau), \overline{u}(\tau)\right), \;\; \overline{x}\Big|_{\tau=t} = x(t), \tag{4}$$

которую будем называть прогнозирующей моделью по отношению к (1). Введение прогнозирующей модели нужно потому, что любая математическая модель вида (1) лишь приближенно представляет реальный объект. Это связано с такими неучтёнными факторами как вариации параметров, внешние воздействия, нелинейности и т. д. В то же время фиксированная модель (4) при любых вариациях неучтённых факторов позволяет приближенно спрогнозировать его поведение. Обычно прогнозирующая модель выбирается довольно простой с тем, чтобы её можно было интегрировать в реальном масштабе времени и непосредственно использовать в контуре управления.

Простейший алгоритм такого метода можно представить так:

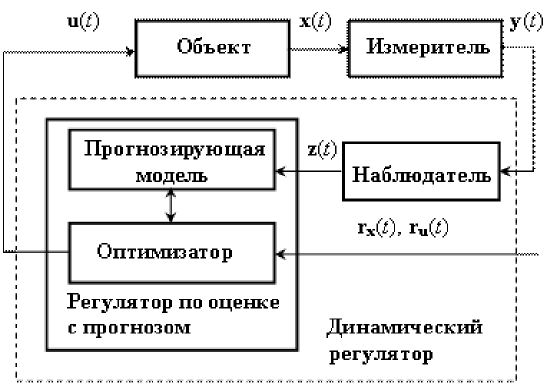
1. Рассматривается некоторая простая математическая модель объекта, начальными условиями для которой служит его текущее состояние. При заданном программном управлении выполняется интегрирование уравнений этой модели, что дает прогноз движения объекта на некотором конечном отрезке времени (горизонте прогноза).

2. Выполняется оптимизация программного управления, целью которого служит приближение регулируемых переменных прогнозирующей модели к соответствующим задающим сигналам на горизонте прогноза. Оптимизация осуществляется с учётом всего комплекса ограничений, наложенных на управляющие и регулируемые переменные.

3. На шаге вычислений, составляющем фиксированную малую часть горизонта прогноза, реализуется найденное оптимальное управление и осуществляется измерение фактического состояния объекта на конец шага.

4. Отрезок времени сдвигается на шаг вперед, и повторяются пункты 1-3 данной последовательности действий.

Общая структурная схема управления с прогнозированием представлена на рисунке.



Общая структурная схема управления с прогнозированием

Несовпадение прогнозируемого и реализуемого движений объекта порождает два важнейших следствия. Во-первых, схема управления на базе прогноза с удаляющимся конечным горизонтом принципиально не позволяет достичь минимума функционала (3), который обеспечивается программным управлением, но лишь в определенной степени позволяет приблизиться к нему. При этом отличие будет тем большим, чем меньше горизонт предсказания. Во-вторых, в силу отличия фактического движения от предсказанного, рассматриваемая схема управления с обратной связью не гарантирует устойчивость первого из них по Ляпунову.

Следует отметить еще одно важное обстоятельство. Даже если информация о состоянии объекта поступает в регулятор непрерывно, то в общем случае для решения оптимизационной задачи, которое, как правило, осуществляется приближенными численными методами, необходимо некоторое конечное время. Следовательно, управление, соответствующее полученному состоянию, будет подано на объект с неизбежным запаздыванием.

Приведенная схема управления имеет следующие особенности:

1. В качестве прогнозирующей модели можно использовать нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Подход позволяет учитывать ограничения, которые наложены как на управляющие переменные, так и на компоненты вектора состояния.

3. Подход предусматривает минимизацию функционала, характеризующего качество процесса управления, в режиме реального времени.

4. Для управления с предсказанием необходимо, чтобы текущее состояние объекта непосредственно измерялось или оценивалось.

5. Предсказанное поведение динамического объекта в общем случае будет отличаться от его реального движения.

6. Для работы в реальном масштабе времени необходимо, чтобы решение оптимизационной задачи управления, описанной выше, осуществлялось достаточно быстро, в пределах допустимого запаздывания.

7. Непосредственная реализация рассмотренной схемы MPC-стратегии не гарантирует устойчивость по Ляпунову движения объекта, что требует принятия специальных мер по её обеспечению.

Задача управления с линейной моделью и квадратичным функционалом

Рассмотрим задачу управления с линейной моделью и квадратичным функционалом. Пусть объект управления описывается линейной системой дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{\overline{X}} &= A \cdot \overline{X} + B \cdot \overline{U}; \\ \overline{Y} &= C \cdot \overline{X}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $A - n \times n$ матрица, $U - n \times m$ матрица, $C - r \times n$ матрица.

Для оценки качества процесса управления вводится квадратичный функционал

$$J = \int_0^\infty \left(\overline{y}^T \cdot R \cdot \overline{y} + \lambda^2 \cdot \overline{u}^T \cdot Q \cdot \overline{u} \right) dt, \tag{6}$$

где $\overline{y}$ и $\overline{u}$ — функции от t, $R - r \times r$ и $Q - m \times m$ — положительно-определённые симметричные квадратные матрицы; λ — постоянный положительный коэффициент.

Определим конечную последовательность x_i, $i = 1, \ldots, p$ как прогноз движения объекта с горизонтом прогноза p.

Оптимальное управление ищется в виде

$$\overline{u} = -K \cdot \overline{x}. \tag{7}$$

Алгоритм поиска управляющего воздействия в данном MPC-законе представляется так.

Для исходных матриц из (5), представленных A, B, C и горизонтом прогноза p, формируются вспомогательные матрицы L и M по следующим формулам

$$L = \begin{pmatrix} C \cdot A \\ C \cdot A^2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ C \cdot A^p \end{pmatrix}; \quad M = \begin{pmatrix} C \cdot B & 0 & \ldots & 0 \\ C \cdot A \cdot B & C \cdot B & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ C \cdot A^{p-1} \cdot B & & & C \cdot B \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Используя R и Q, вычисляется матрица $K1$ по формуле

$$K1 = -\left(M^T \cdot R \cdot M + Q \right)^{-1} M^T \cdot R \cdot L. \tag{9}$$

Выделяются верхние блоки размером *mxn* из $K1$ и принимаются в качестве матрицы K.

В системе MATLAB пакета Control Toolbox существует встроенная функция *lqr* и *dlqr* (для дискретного процесса), позволяющая получить коэффициент K, имея известные описанные выше матрицы A, B, R, Q. В простейшем случае это выглядит так:

$$K = lqr(A, B, R, Q). \tag{10}$$

Рассмотрим пример решения такой задачи. Пусть требуется найти стабилизирующее управление системой, заданной уравнением (данная система рассматривается в [3])

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + u, \\ \dot{x}_2 = -x_2. \end{cases}$$

$$J = \int_0^\infty \left(2x_2^2 + u^2 \right) dt.$$

Выпишем матрицы A и B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Составим матрицы Q и R (квадратные симметричные положительно определённые)

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot R \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{11} & 0 \\ 0 & r_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

получим, что $r_{11} \cdot x_1^2 + r_{22} \cdot x_2^2 = 2x_2^2$.

Следовательно, $r_{11} = 0,\ r_{22} = 2$. Отсюда можем получить матрицу $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Нетрудно видеть, что матрица $Q = 1$.

Находим K, используя полученные матрицы $A,\ B,\ R,\ Q$,

$$K = lqr(A, B, R, Q) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, управление здесь запишется как $u = -K \cdot x = -2x_1 - 0 \cdot x_2 = -2x_1$.

Вкратце покажем решение этого же примера с помощью матриц L и M. Для горизонта прогноза $p = 1$ согласно (8):

$L = (C \cdot A),\ M = (C \cdot B)$. Получим $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Далее, используя (9), находят $K1$, а затем K.

По существу, MPC-подход в линейно-квадратичной постановке без ограничений даёт один из способов формирования квазиоптимальных управлений по отношению к дискретной LQR задаче.

К достоинствам подхода здесь лишь можно отнести существенное упрощение вычислительной процедуры поиска коэффициентов по сравнению с классической дискретной оптимизацией, включающей решение уравнения Риккати. Фактически это упрощение достигается за счёт отказа от априорного учёта требования устойчивости и за счёт конечности интервала, на котором рассматривается процесс. При этом процедура настройки регулятора может быть реализована в режиме реального времени непосредственно перед его функциональным использованием, например, на борту подвижного объекта.

Однако ситуация принципиально меняется при учёте ограничений на управления и контролируемые переменные, существенно сужающих допустимое множество регуляторов в задаче LQR-оптимизации. Здесь построение точного оптимального решения в реальном времени весьма проблематично, что значительно повышает обоснованность привлечения MPC-подхода.

MPC-подход с учётом ограничений на управляющие воздействия позволяет существенно повысить качество переходных процессов: уменьшить время и снизить перерегулирование по выходным координатам по сравнению с LQR-оптимальным синтезом.

Выводы

Решение оптимальных задач управления с прогнозированием является одним из современных методов исследования систем управления и легко реализуется с помощью таких систем как MATLAB, которая с её пакетами обладает большими возможностями и инструментами решения задач анализа, синтеза и моделирования систем управления, в том числе и с прогнозированием. Это позволяет привлекать её для решения реальных примеров по управлению всевозможными технологическими процессами и внедрения новинок в производстве, например, по управлению нестационарными режимами технологических процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Веремей Е. И., Еремеев В. В. Введение в задачи управления на основе предсказаний // Всероссийская научная конференция «Проектирование научных и инженерных приложений в среде MATLAB». — М., 2004. — С. 98—115.

2. Денисенко Н. А., Рогачёв А. И., Караман Д. Г. Применение пакета MATLAB для решения задач управления с прогнозированием // Вестник НТУ «ХПИ». — Харьков: НТУ «ХПИ». — 2006. — № 9. — С. 30—33.

3. Жабко А. П. и др. Сборник задач и упражнений по теории управления: стабилизация программных движений — М.: Высшая школа, 2003 — 285 с.

Рогачёв Александр Иванович — профессор, ***Денисенко Николай Анатольевич*** — аспирант.

Кафедра автоматики и управления в технических системах, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»