УДК 515.12
УДК 621.3.031:510.6

Б. І. Мокін, д. т. н., проф.;
В. В. Камінський

СЛАБКІ МНОЖИНИ ЯК АЛЬТЕРНАТИВА НЕЧІТКИМ МНОЖИНАМ В МОДЕЛЮВАННІ НЕВИЗНАЧЕНИХ ПАРАМЕТРІВ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

Виконано аналіз недоліків, властивих теорії нечітких множин, як засобу моделювання невизначених параметрів складних систем. Показано, що значної частини цих недоліків можна уникнути, якщо замість нечітких множин використовувати введені в роботах авторів слабкі множини. Показано, як можна моделювати невизначені параметри складних систем за допомогою слабких множин.

Постановка задачі

В останні роки стрімко зростають роль та можливості інформаційних технологій, і тому з'являються додаткові можливості для постановки та розв'язання актуальних для науки та практики нових задач в умовах недостатності та недовизначеності даних, які традиційно вважаються одними із найбільш складних. Проблеми математичного моделювання та розв'язання таких задач витікають із того, що, як часто відзначав Ю. Б. Гермейєр [1], існує тільки один об'єктивний та строгий математичний результат, який можна отримати за максимінним принципом, відкритим Дж. фон Нейманом [2—4]. Серед різних відомих підходів до аналізу, синтезу й оптимізації систем в умовах невизначеності даних тільки цей принцип не вимагає використання суб'єктивних гіпотез та оцінок щодо невизначених параметрів задачі. На цей час створено значну кількість методів його застосування для розв'язання різних задач в умовах невизначеності даних. Але проблема полягає в тому, що результат застосування цього принципу часто виявляється незадовільним. В цьому випадку існує два можливих шляхи для її вирішення. Перший із них полягає в зменшенні рівня невизначеності даних, що може бути неможливим або вимагати недопустимо великого часу на його реалізацію та витрат значних додаткових матеріальних ресурсів. Другий шлях полягає в використанні суб'єктивних експертних оцінок та гіпотез щодо невизначених параметрів задачі. З цією метою в останні десятиліття широко застосовуються нечіткі множини та лінгвістичні змінні, які дозволяють зменшити невизначеність даних за рахунок використання їх нечітких описів. Але теорія нечітких множин (ТНМ) має такі особливості, які призводять до ряду принципових проблем у процесі використання нечітких множин як інструмента моделювання невизначених параметрів складних систем. На ці проблеми неодноразово звертали увагу як прихильники, так і супротивники цієї теорії [5]. Основні із цих проблем пов'язані з описаним нижче.

Аксіоматичні основи ТНМ не дозволяють знайти таку інтерпретацію ступенів належності нечіткій множині, щоб одержати якесь об'єктивне джерело (або розрахунковий алгоритм) для визначення відповідних функцій належності, як це має місце, наприклад, для функцій розподілу ймовірностей у теорії ймовірності. Тому експертні оцінки становлять єдине джерело одержання функцій належності нечітких множин.

Крім того, аксіоматика ТНМ реалізована так, що ця теорія не має істотних формальних засобів для обмеження впливу суб'єктивних рішень експерта на результат визначення функції належності й формального контролю несуперечності цих рішень, як це має місце в тій же теорії ймовірності. Дійсно, інтерпретуючи ймовірності як частоту появи тієї чи іншої випадкової події в статистичному експерименті, ми автоматично виконуємо всі обмеження аксіом теорії ймовірності, як окремого випадку теорії міри. Якщо виконання відповідного експерименту неможливе з тієї чи іншої причини, або відсутня статистична стійкість експерименту, то для визначення функцій розподілу ймовірностей залишається можливість використовувати експертні оцінки. Але і в цьому випадку експерт, інтерпретуючи ймовірність, як суб'єктивну ступінь впевненості в можливості настання тієї чи іншої випадкової події, повинен виконувати обмежувальні умови аксіом теорії ймовірності. Якщо, наприклад, інтеграл від диференційного закону розподілу ймовірності, отриманого експертним шляхом, не буде дорівнювати одиниці, то вже на чисто формальному рівні ми впевнено констатуємо, що ця експертна оцінка некоректна. У випадку теорії нечітких множин її формальні закони не дозволяють зробити нічого подібного — значення функції належності та співвідношення між ними формально можуть бути довільними. Тому отримані таким чином результати можуть значною мірою залежати як від самого експерта, так і від методу проведення експертної процедури.

Слід також звернути увагу на те, що побудова функції належності нечіткої множини є для експерта досить складною задачею, оскільки для цього він повинен задати кожному елементу універсума точне значення його належності нечіткій множині в умовах відсутності будь-яких об'єктивних джерел для перевірки правильності та точності призначених ступенів належності.

Для того, щоб зняти або хоча б значно зменшити гостроту відзначених проблем, автори пропонують використовувати введені ними в [6—10] слабкі множини замість нечітких.

Основні викладки

Слабка множина $\tilde{\tilde{A}}$ в X, на відміну від нечіткої, в найпростішому випадку задається векторною функцією рівнів ν_A: $X \to M_{\alpha\omega}$, де $M_{\alpha\omega} = M_\alpha \times M_\omega \setminus \{(1; -)\}$ — простір напрямлених рівнів належності, $M_\alpha = [0; 1]$ — простір ненапрямлених рівнів належності, $M_\omega = \{+, -\}$ — простір напрямленостей. В просторі M_α має місце звичайний лінійний порядок елементів, а в просторі M_ω задано нестрогий лінійний порядок $D_\omega = \{(+, +), (+, -), (-, -)\}$. Що стосується простору $M_{\alpha\omega}$, то там задано спеціальний строгий досконалий порядок $S_{\alpha\omega}$ такий, що

$$\forall(\alpha, \omega_\alpha), (\beta, \omega_\beta) \in M_{\alpha\omega} \; ((\beta, \omega_\beta) > (\alpha, \omega_\alpha) \Leftrightarrow (\beta > \alpha \wedge \omega_\beta = \omega_\alpha) \vee (\omega_\beta > \omega_\alpha)). \tag{1}$$

Векторну функцію рівнів ν_A слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ в X можна також подати у вигляді пари координатних функцій α_A: $X \to M_\alpha$, ω_A: $X \to M_\omega$, за умови, що

$$(\alpha_A(x) = 1 \Rightarrow \omega_A(x) \neq -) \wedge (\omega_A(x) = - \Rightarrow \alpha_A(x) \neq 1), \; \forall x \in X,$$

де α_A — функція ненапрямлених рівнів належності слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$; ω_A — функція напрямленостей слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$.

Для елементів $(\alpha; \omega)$ простору $M_{\alpha\omega}$ введемо зручне позначення α^ω. Напрямлений рівень α^+ будемо називати позитивно напрямленим, а α^- — негативно напрямленим. В [8] показано, що напрямлені рівні належності можна інтерпретувати, як точні грані можливих значень ступенів належності ще не сформованій в X нечіткій множині. При цьому негативно напрямлені рівні задають верхню точну грань можливих значень цих ступенів належності, а позитивно напрямлені — нижню грань їх можливих значень. Таким чином слабка множина задає лише «слабкий опис» невизначеного параметра, приписуючи кожному елементу універсума не точне значення належності, що було б достатньо для створення нечіткого опису цього параметра, а тільки нижню або верхню грань цієї належності. За цих умов лінійний порядок (1) фактично задає упорядкованість граничних значень ступенів належності ще не сформованій нечіткій множині, які зростають від мінімально можливого негативно напрямленого рівня належності 0^- до максимально можливого позитивно напрямленого рівня належності 1^+.

Геометричною інтерпретацією напрямлених рівнів належності, як показано в [10], можуть бути точки відрізка прямої, упорядковані зліва на право у відповідності до $S_{\alpha\omega}$ (рис. 1).

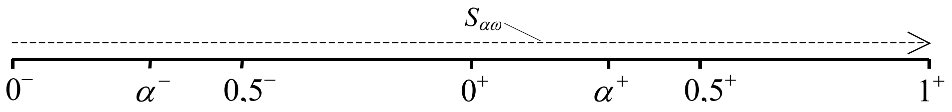

Рис. 1. Відрізок напрямлених рівнів належності

Покажемо, як можна моделювати невизначені параметри складних систем зі значеннями в множині дійсних чисел з допомогою слабких множин.

Нехай значення параметра p відоме і дорівнює p_0, тобто $p = p_0$; $p_0 \in R$, де R — множина дійсних чисел. Слабкий опис $\tilde{\tilde{P}}$ відомого параметра p можна подати у вигляді функції рівнів ν_P, такої, що

$$\forall p \in \mathrm{R}\ ((p \le p_0 \Rightarrow \nu_P\ (p) = 1^+) \wedge (p > p_0 \Rightarrow \nu_P\ (p) = 0^-)). \qquad (2)$$

У відповідності до прийнятої вище інтерпретації напрямлених рівнів належності, значення 1^+ функції рівнів ν_P означає, що для всіх $p \le p_0$ навіть нижня точна грань можливих ступенів належності дорівнює одиниці. Про такі значення p далі будемо говорити, що вони знаходяться на стовідсотковому рівні належності по відношенню до слабкої множини $\tilde{\tilde{P}}$, або мають слабкий рівень належності — одиниця. В той же час для всіх $p > p_0$ навіть верхня точна грань можливих ступенів належності дорівнює нулю. Про такі елементи універсума будемо говорити, що вони знаходяться на нульовому рівні належності до слабкої множини $\tilde{\tilde{P}}$, або слабко належать їй на рівні нуль, що означає повну неналежність навіть на слабкому рівні. Таким чином на стовідсотковому рівні належності до слабкої множини $\tilde{\tilde{P}}$ знаходяться тільки ті числові значення, які не перевищують відоме значення параметра p, а всі інші знаходяться по відношенню до неї на слабкому рівні нуль. Оскільки значення параметра p відоме, то проміжних напрямлених рівнів належності слабкій множині $\tilde{\tilde{P}}$ не існує.

Тепер розглянемо випадок, коли числове значення p_0 параметра p невизначене.

Логічно припустити, що особа, яка здатна грати роль експерта в даній ситуації, не знаючи точного значення p_0 невизначеного параметра p, може досить надійно оцінити деяке максимально можливе значення цього параметра $p_{\min}$ так, що навіть нижня грань її впевненості в тому, що $p_0 \ge p_{\min}$ буде дорівнювати 100 %. Очевидно, що в цьому випадку згідно з (2), всім $p \le p_{\min}$ слід приписати напрямлений рівень належності 1^+. Логічно також припустити, що експерт не менш надійно здатен оцінити таке мінімально можливе значення цього параметра $p_{\max}$, за якого навіть верхня грань його впевненості в тому, що $p_0 \ge p_{\max}$ буде дорівнювати нулю. В цьому випадку згідно з (2), всім $p \ge p_{\max}$ слід приписати напрямлений рівень належності 0^-. Інші можливі значення невизначеного параметра із інтервалу $]p_{\min};\ p_{\max}[$ повинні отримати відмінні від 0^- та 1^+ значення напрямлених рівнів належності.

Враховуючи зроблені припущення, а також те, що із зростанням можливих числових значень невизначеного параметра p гранична впевненість експерта в тому, що ці значення не перевищують невідомого точного значення цього параметра не може збільшуватись, приходимо до математичної моделі невизначеного параметра p у вигляді слабкої множини $\tilde{\tilde{P}}$ такої, що

$$\exists p \in \mathrm{R}\ (\nu_P(p) = 1^+); \qquad (3)$$

$$\exists p \in \mathrm{R}\ (\nu_P(p) = 0^-); \qquad (4)$$

$$\forall p_1, p_2 \in \mathrm{R}\ (p_1 < p_2 \Rightarrow \nu_P(p_1) \ge \nu_P(p_2)). \qquad (5)$$

Співвідношення $\nu_P(p_1) \ge \nu_P(p_2)$, використане в (5) виконується, якщо пара $(\nu_P(p_1),\ \nu_P(p_2))$ належить бінарному відношенню нестрогого порядку $D_{\alpha\omega} = = S_{\alpha\omega} \cup E_{\alpha\omega}$, індукованому відношенням $S_{\alpha\omega}$ на $M_{\alpha\omega}$, де $E_{\alpha\omega}$ — діагональне відношення на $M_{\alpha\omega}$.

Оскільки вірно оцінити граничне значення ступеня належності значно простіше, ніж його точне значення, то побудувати слабкий опис невизначеного параметра згідно з (3—5) експерту значно простіше, ніж відповідний нечіткий опис. Результати досліджень проведених авторами показали, що такі описи можуть повноцінно замінити нечіткі в багатьох задачах аналізу та синтезу складних систем в умовах невизначеності даних, що дає можливість використати переваги побудови слабких описів. Зокрема в [8] показано як, використовуючи описаний підхід, моделювати невизначені параметри режиму електропостачальних систем.

Отриманий слабкий опис невизначеного параметра p можна також використовувати як допоміжний в процесі побудови його нечіткого опису у вигляді функції належності μ_P. При цьому суб'єктивні оцінки експерта будуть обмежуватись формальними правилами теорії слабких множин, згідно з якими

$$(\omega_P(p) = + \Rightarrow \mu_P(p) \geq \alpha_P(p)) \wedge (\omega_P(p) = - \Rightarrow \mu_P(p) \leq \alpha_P(p)),\ \forall p \in \mathrm{R}. \quad (6)$$

Невиконання умов (6) означає наявність суперечності між слабким та нечітким описом невизначеного параметра з точки зору наведеної вище інтерпретації напрямлених рівнів належності.

В [8], нечіткі множини $\tilde{P}$, які задовольняють умови (6) названі нечіткими реалізаціями слабкої множини $\tilde{\tilde{P}}$. Таким чином варіанти можливого переходу від слабкої до нечіткої множини обмежуються на чисто формальному рівні множиною всіх нечітких реалізацій слабкої множини. Обмежити подібним чином вплив суб'єктивних рішень експерта на результат побудови нечітких описів невизначених параметрів, базуючись тільки на теорії нечітких множин було б неможливо.

В [10] автори показали, що слабку множину $\tilde{\tilde{P}}$ можна зображати геометрично двома способами. Основний з них полягає в тому, що слабка множина зображається у вигляді графіка її функції напрямлених рівнів належності ν_P в спеціальних напрямлених осях координат. Такі осі отримаємо із звичайних декартових осей, якщо в якості осі ординат будемо використовувати відрізок напрямлених рівнів належності (рис. 1). Крім того, слабку множину можна зобразити і в звичайних декартових осях у вигляді графіка функції ненапрямлених рівнів належності α_P. Оскільки остання не утримує інформацію про напрямленість рівнів належності, то, в цьому випадку, та частина графіка, яка відповідає позитивно напрямленим рівням належності, зображається суцільною лінією, а та, яка відповідає негативно напрямленим рівням належності — пунктирною. Для однотипності аналогічна домовленість зберігається також і у випадку використання напрямлених осей координат.

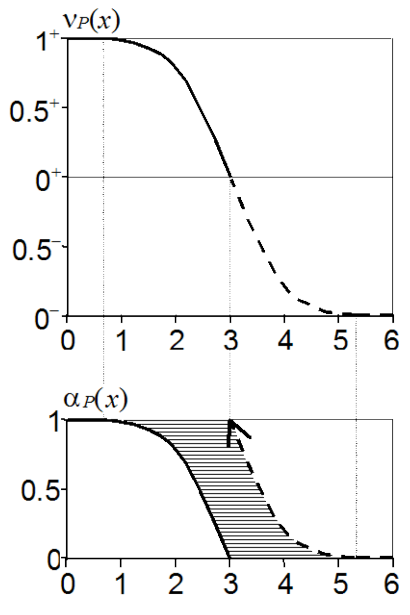

Рис. 2. Приклад геометричного зображення слабкої множини в напрямлених та звичайних осях координат

На рис. 2 показано обидва варіанти геометричного зображення слабкої множини, яка відповідає математичній моделі (3—5). Із наведеного рисунка видно, що графік функції α_P в звичайних осях координат формує область нечітких реалізацій слабкої множини (на рисунку ця область заштрихована). Графіки функцій належності всіх нечітких множин, які відповідають умовам (6) повинні повністю лежати в цій області. Таким чином область нечітких реалізацій слабкої множини створює незалежні від експерта обмеження на побудову функції належності невизначеного параметра, яка базується на відомому слабкому описі цього параметра.

Висновки

Використовуючи слабкі множини замість нечітких в процесі моделювання невизначених параметрів складних систем, ми суттєво спрощуємо задачу експерта, оскільки побудувати слабкий опис невизначеного параметра значно простіше ніж відповідний нечіткий опис. В той же час, як показано в роботах авторів, слабкі описи можуть успішно використовуватись замість відповідних нечітких описів в процесі розв'язання різних задач аналізу та синтезу складних систем в умовах невизначеності даних. Це дає можливість моделювати складні системи в умовах, коли не задані не тільки числові, але навіть нечіткі та лінгвістичні значення їх невизначених параметрів.

Крім того слабкі описи невизначених параметрів можна використовувати як першу стадію побудови відповідних нечітких описів. Це дозволяє обмежити рамки суб'єктивних рішень експерта з формування нечіткого опису та на формальному рівні контролювати його несуперечність, що неможливо було б досягнути, базуючись тільки на теорії нечітких множин.

Враховуючи відзначені в цій роботі переваги використання слабких множин в моделюванні складних систем в умовах невизначеності даних, можна зробити висновок про теоретичну та практичну доцільність подальших досліджень в цьому напрямку та розробки повноцінних основ теорії слабких множин.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций. — М.: Наука, 1971. — 384 с.

2. Нейман Дж. фон. К теории стратегических игр // Матричные игры. — М.: Физматгиз, 1961. — С. 121—137.

3. Демянов В. Ф., Малоземов В. Н. Введение в минимакс. — М.: Наука, 1972. — 368 с.

4. Федоров В. В. Численные методы максимина. — М.: Наука, 1979. — 380 с.

5. Танака К. Итоги рассмотрения факторов неопределенности и неясности в инженерном искусстве // Нечёткие множества и теория возможностей. Последние достижения: Пер. с англ. / Под ред. Р. Р. Ягера. — М.: Радио и связь, 1986. — 408 с.

6. Мокін Б. І., Камінський В. В. Математичне моделювання процесів пошуку оптимальних рішень з використанням слабко заданих вхідних параметрів. // Пр. VII Міжнародної науково-технічної конференції «Контроль і управління в складних системах (КУСС-2003)», м. Вінниця, 8—11 жовтня 2003 року. — Вінниця: УНІВЕРСУМ—Вінниця. — 2003. — С. 7—10.

7. Мокін Б. І., Камінський В. В. Слабкі множини та їх застосування до розв'язання задач прийняття рішень в умовах невизначеності даних // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2004. — № 3. — С. 102—108.

8. Мокін Б. І., Камінський В. В. Математичне моделювання невизначених параметрів режиму електромереж з допомогою слабких множин // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2005. — № 6. — С. 89—96.

9. Мокин Б. И., Каминский В. В. Основы теории слабых множеств и её прикладные аспекты // Тр. 12-й Международной конференции по автоматическому управлению (Автоматика — 2005)». — Харьков: Изд-во НТУ «ХПИ». — 2005. — Т. 1. — С. 22—23.

10. Мокін Б. І., Камінський В. В. Геометрична інтерпретація слабких множин та їх систем нечітких реалізацій. // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2006. — № 4. — С. 34—47.

Мокін Борис Іванович — професор кафедри моделювання і моніторингу складних систем; ***Камінський Вячеслав Вікторович*** — старший викладач кафедри електротехнічних систем електроспоживання та енергетичного менеджменту.

Вінницький національний технічний університет