

УДК 681.511.4

И. П. Завальнюк, асп.

УСЛОВИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ УДАРА В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С МАЛОЙ ДИССИПАЦИЕЙ ЭНЕРГИИ

Исследовано поведение динамической системы с малой диссипацией энергии в критическом режиме работы. Определены условия и момент возникновения ударных нагрузок. Проведено моделирование системы в программе MATLAB, что позволило установить критерий снятия управления в условиях напряженности.

Введение

Перед каждой современной системой управления стоит задача — эффективно выполнять возложенные на неё функции. Во многих случаях это может привести к возникновению напряженных режимов работы, следствием чего может стать увеличение нагрузки и переход системы в критический режим работы [1—4].

Учет изменения диссипации системы, описывает реальную ситуацию, возникающую при перенапряженных режимах, когда дальнейшая отдача энергии через контур диссипации во внешнюю среду прекращается. Примерами могут быть случаи перегрузки систем охлаждения, перенапряженности механических систем и т. д.

Естественная реакция в такой ситуации — резкое снятие управления, при этом энергия высвобождается в виде динамического удара в контуре диссипации.

Постановка задачи

Большое значение для динамических систем с ограниченными ресурсами контура диссипации имеет нахождение условий возникновения удара при резком снятии управления, что обеспечит возможность предупреждения аварий и разрушений. Кроме того, важно определить критерий снятия управления, учёт которого позволил бы осуществить более мягкий выход системы из состояния напряженности.

Цель статьи — определение условий возникновения ударных нагрузок в контуре диссипации, а также нахождение критерия снятия управления в условиях напряженности динамических систем.

Решение задачи

Пусть исследуемая динамическая система описывается уравнением

$$\ddot{x} + a_1 \zeta(E) \dot{x} + a_2 x = 0, \quad (1)$$

где x — обобщенная координата рассматриваемой системы; $\zeta(E)$ — функция диссипации энергии в системе; a_1, a_2 — постоянные коэффициенты.

Полная энергия системы (при отсутствии обобщенных диссипативных и внешних сил) находится с помощью уравнения Лагранжа и принципа Гамильтона [5] как сумма кинетической T и потенциальной энергий V :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j, \quad (2)$$

где m_{ij} — коэффициенты инерции, причем $m_{ij} = m_{ji}$.

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k k_{ij} x_i x_j, \quad (3)$$

где $k_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$.

Таким образом, для системы (1) кинетическая энергия определяется

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2. \quad (4)$$

А потенциальная энергия

$$V = \frac{1}{2} k x^2, \quad (5)$$

где $k = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$.

Тогда величину полной энергии в системе можно оценить как

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2. \quad (6)$$

При этом скорость изменения энергии относительно изменения переменной x равна

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \ddot{x} + kx. \quad (7)$$

Вычитая из уравнения (1) уравнение (7) можно получить выражение, аналитически определяющее контур диссипации исследуемой системы (1):

$$\zeta(E) \dot{x} = \frac{1}{a_1} \left(-\frac{\partial E}{\partial x} - (a_2 - 1) x \right). \quad (8)$$

Для нахождения условия удара в контуре диссипации введем новую переменную $\eta = \zeta(E) \dot{x}$ и определим

$$E^*, \dot{x}^* \rightarrow \max \eta.$$

Известно [6], что максимум любой функции устанавливается исходя из условия стационарности и используя критерий Сильвестра (исследуются миноры матрицы Гессе).

Таким образом,

$$\nabla \eta = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \zeta(E)}, \frac{\partial \eta}{\partial \dot{x}} \right); \quad \frac{\partial \eta}{\partial \zeta(E)} = \dot{x} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \eta}{\partial \dot{x}} = \zeta(E) = 0.$$

Следовательно, момент удара соответствует началу диссипации и максимальной потенциальной энергии системы, поскольку к моменту возникновения удара $\dot{x} \rightarrow \min$ или $\dot{x} \approx 0$.

Матрица Гессе для функции η имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \zeta^2(E)} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial \zeta(E) \partial \dot{x}} \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial \dot{x} \partial \zeta(E)} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial \dot{x}^2} \end{pmatrix}.$$

Согласно критерию Сильвестра для достижения функцией η максимума необходимо, чтобы диагональные миноры матрицы Гессе удовлетворяли условию

$$\Delta_1 \leq 0; \quad \Delta_2 \geq 0.$$

Рассматривается случай, когда функция диссипации имеет вид (рис. 1).

Поэтому исследуемая система способна рассеивать энергию до некоторого момента времени, после чего коэффициент диссипации падает — система начинает накапливать энергию, т. е. переходит в критический режим работы. В этом случае $\zeta(E) = \text{const} = \zeta_0$, а также $\dot{x} \rightarrow \min$ ($\dot{x} \approx 0$).

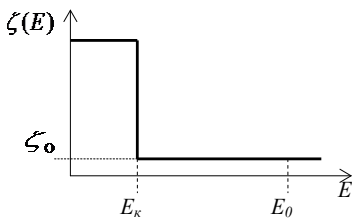


Рис. 1. Вид функции диссипации исследуемой системы: E_0 — количество энергии, накапливаемое в критическом режиме; E_k — количество энергии, пропорциональное величине удара при снятии нагрузки

Следовательно, уравнение (1) примет вид

$$\ddot{x} + a_2 x = 0. \tag{9}$$

Решение этого уравнения

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi); \quad \omega = \sqrt{a_2}. \tag{10}$$

Кроме того, полная энергия системы, находящейся в критическом режиме, определяется потенциальной составляющей

$$E_0 = \frac{1}{2} x^2. \tag{11}$$

Анализируя (10), можно сделать вывод, что величина удара при резком снятии нагрузки, будет определяться моментом снятия нагрузки, т. е. максимальный удар в контуре диссипации соответствует моменту, когда $x(t) = x_{\max} = A$. В этом случае

$$E_k = E_{\max} = \frac{1}{2} x_{\max}^2 = \frac{1}{2} |A|^2, \text{ причем } \left| \frac{\partial \zeta}{\partial E} \right| \rightarrow \max. \tag{12}$$

Таким образом, в системах с малой диссипацией энергии максимальный удар возможен при снятии управления в момент времени t_1 ; удар будет отсутствовать или его величина будет минимальна, если нагрузка снимается в момент времени t_2

$$t_1 = n \frac{T}{4}; \quad t_2 = l \frac{T}{4}, \tag{13}$$

где $n = 1, 3, 5 \dots$ — целое нечетное число; $T = \frac{2\pi}{\omega}$ — период сигнала $x(t)$; $l = 0, 2, 4 \dots$ — целое четное число.

Выдвинутые предположения подтверждаются моделированием исследуемой системы в программе MATLAB (рис. 2).

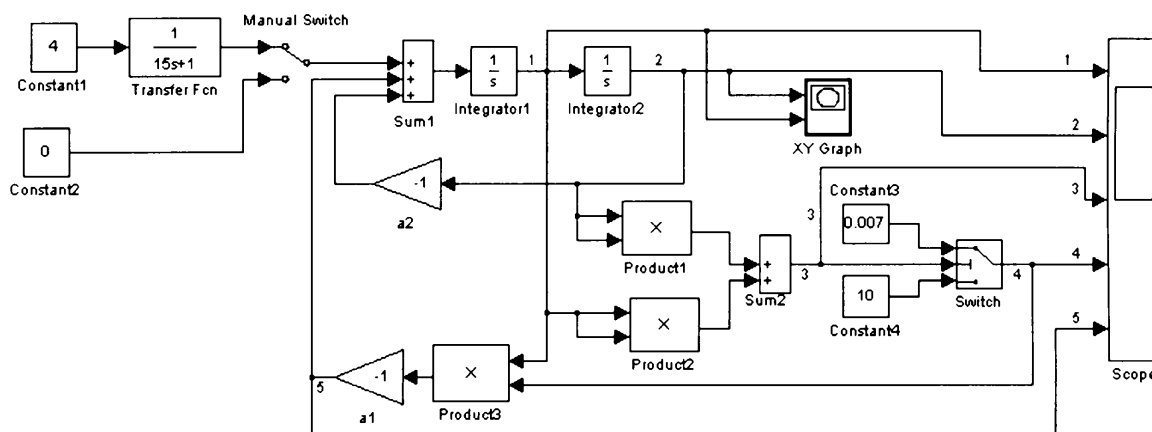


Рис. 2. Схема моделирования исследуемой системы

Причем, для постепенного разгона системы (1), а также чтобы избежать перегрузок при её пуске, необходимо выбрать следующий тип управления:

$$U_1(t) = k U_0 (1 - \exp(-t/T_1)), \tag{14}$$

где U_0 — амплитуда управления. Ее величина должна быть такой, чтобы вывести систему в область значительной диссипации; T_1 — постоянная времени (время разгона системы). Ее значение должно быть больше, чем собственная частота объекта.

Выбранный тип управления (14) организован блоками Constant1 и Transfer Fcn, а необходимый вид функции диссипации — ключом Switch и блоками Constant3 и Constant4, чтобы задать нижний и верхний пределы диссипации (соответственно). В качестве управляющего параметра ключа

(threshold = 13) задано значення енергії, по досягненню якого дисипація в системі різко падає до нижнього рівня. Чем больше это значение, тем меньше величина наблюдаемых колебаний в системе после спада дисипации и снятия нагрузки. Кроме того, колебательность наблюдаемых процессов зависит от значения нижнего предела дисипации (чем меньше, тем больше колебательность процессов).

Результаты моделирования для моментов снятия нагрузки $t_1 = 29 \frac{T}{4}$ (рис. 3а, рис. 4а) и $t_2 = 66 \frac{T}{4}$ (рис. 3б, рис. 4б) показали, что, учитывая время снятия управления можно изменять величину удара в диссипирующем контуре. При этом момент удара соответствует началу диссипации и максимальной потенциальной энергии системы.

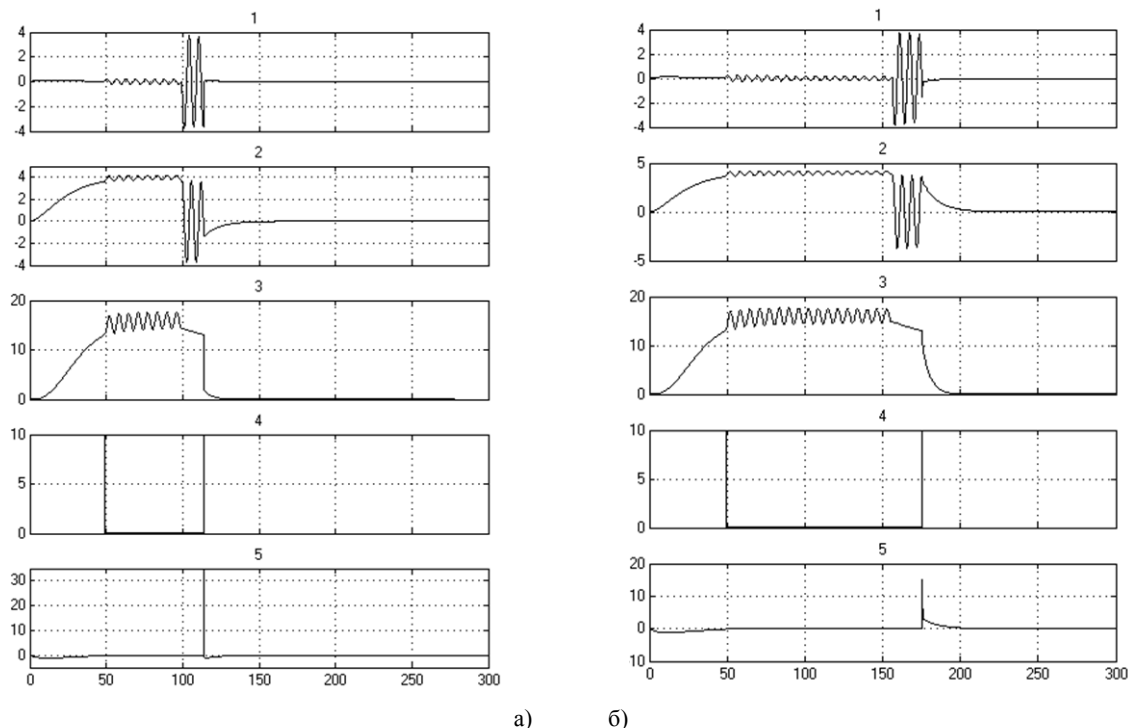


Рис. 3. Осциллограммы сигналов: 1, 2 — сигналы dx/dt и X ; 3 — количество энергии в системе; 4 — характер диссипации энергии; 5 — изменение энергии после диссипирующей цепи

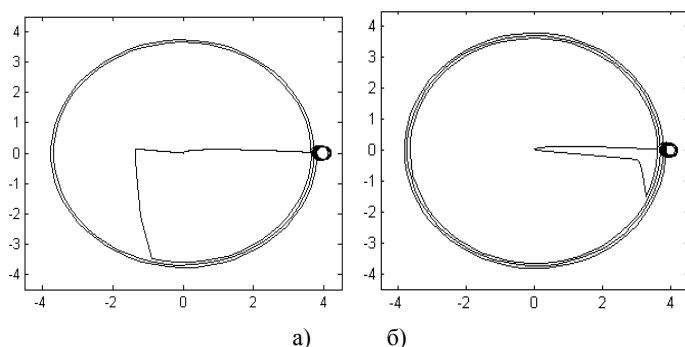


Рис. 4. Фазовые портреты системы

Однако не всегда возможно исключить нагрузку в необходимый момент времени. Поэтому целесообразно рассмотреть вопрос о скорости снятия управления, не приводящей к возникновению ударных нагрузок в контуре диссипации. Понятно, что скорость торможения системы не должна превышать скорость её разгона.

Поскольку переход исследуемой системы в критический режим осуществлялся под действием управления $U_1(t)$, то разумно проводить возврат к начальному режиму функционирования согласно

$$U_2(t) = kU_0 \exp(-t/T_2), \tag{15}$$

где T_2 — время торможения системы.

Тогда соотношение скоростей торможения и разгона системы будет иметь вид

$$\frac{dU_2(t)}{dt} \leq \frac{dU_1(t)}{dt}. \tag{16}$$

Решив это неравенство, учитывая уравнения (14) и (15), можно получить условие снижения амплитуды удара:

$$T_2 \geq T_1. \tag{17}$$

Для проверки полученного условия проведено моделирование исследуемой системы в программе MATLAB. В схеме моделирования (рис. 5) для разгона системы используются блоки U01 и U1, а для торможения — блоки U02, U2, Switch1 и Switch2.

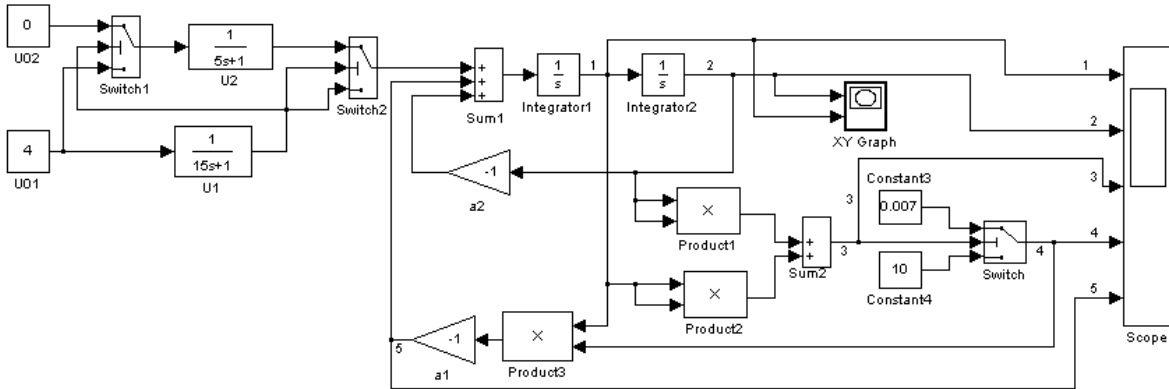


Рис. 5. Схема моделирования системы

Результаты моделирования для $T_2 = 5$ с и $T_1 = 15$ с представлены на рис. 6а. Они показывают, что при $T_2 < T_1$ переход системы из критического режима в начальное состояние происходит со значительным ударом в контуре диссипации, возникающем из-за резкого возрастания диссипации

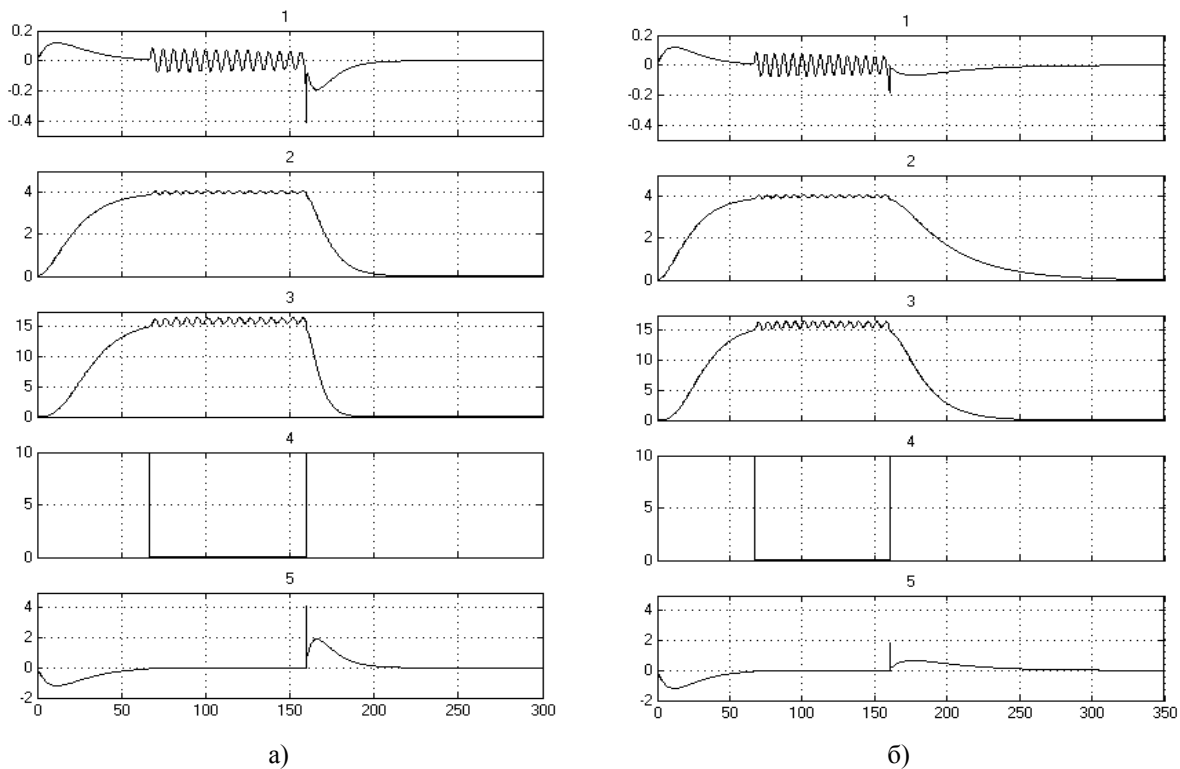


Рис. 6. Осциллограммы сигналов: 1, 2 – сигналы dx/dt и x ; 3 – количество энергии в системе; 4 – характер диссипации энергии; 5 – изменение энергии после диссипирующей цепи

энергии системы. При увеличении времени торможения ($T_2 = 35$ с), имея тот же характер роста диссипации энергии, можно уменьшить амплитуду удара, что отражают результаты моделирования при $T_2 > T_1$ (рис. 6б).

Анализируя фазовые портреты системы, при различном соотношении скорости торможения и скорости разгона системы, можно судить об изменении величины удара в контуре диссипации.

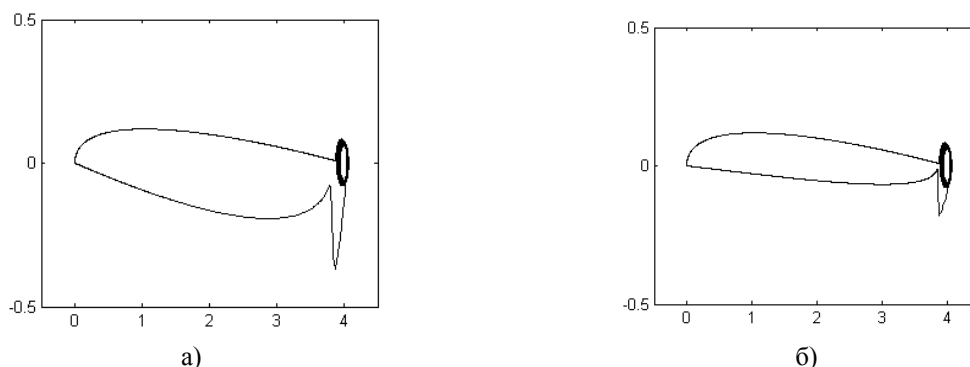


Рис. 7. Фазовые портреты системы

Действительно, при $dU_2/dt > dU_1/dt$ (рис. 7а) амплитуда удара в случае выхода системы из напряженного режима значительно больше, чем при $dU_2/dt < dU_1/dt$ (рис. 7б).

Выводы

1. Исследование показало, что момент удара соответствует началу диссипации и максимальной потенциальной энергии системы.
2. Детальный анализ условий возникновения ударных нагрузок в контуре диссипации позволил определить критерий снятия управления в условиях напряженности динамических систем.
3. Учитывая момент (время) снятия управления, можно, устранить удар или свести его величину к минимуму.
4. Устанавливая время торможения системы большим времени разгона, можно увеличить время возврата системы к начальному состоянию, тем самым снизить ударную нагрузку в диссипирующем контуре. Это актуально если снятие управления в определенный момент времени невозможно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джакаля Г. Е. О. Методы теории возмущений для нелинейных систем / Под ред. А. П. Маркеева. — М.: Наука. Гл. ред. физ.- мат. лит., 1988. — 320 с.
2. Магнус К. Колебания: Введение в исследование колебательных систем. — М.: Мир, 1982. — 304 с.
3. Холодник М., Клич А., Кубичек М., Марек М. Методы анализа нелинейных математических моделей: Пер. с чешск. — М.: Мир, 1991. — 368 с.
4. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения: Учеб. пособие для вузов. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — 304 с.
5. Теория автоматического управления. Кн.1. Математическое описание, анализ устойчивости и качества систем автоматического регулирования / Под ред. Солодовникова В. В. — М.: Машиностроение, 1967. — 770 с.
6. Аркадьев В. Ю., Бражник А. М. Основы оптимизации систем управления и их моделирования. Учебное пособие. — К.: Национальная Академия Наук Украины, Международная Академия Информатизации — Херсон: Херсонский государственный технический университет, 2000. — 248 с.

Завальнюк Инна Петровна — аспирант кафедры технической кибернетики.

Херсонский национальный технический университет