УДК 681.5.017

С. М. Москвіна, к. т. н., доц.;
Т. О. Голубєва, асп.;
О. М. Москвін, студ.

ПРО ПІДВИЩЕННЯ СТІЙКОСТІ МЕТОДІВ МОДЕЛЮВАННЯ ЖОРСТКИХ СИСТЕМ

Проведено аналіз та дослідження сучасних методів моделювання жорстких систем та їх стійкості, визначено проблеми, що призводять до зниження стійкості. Запропоновано декілька алгоритмів, що забезпечують стійкість методу на всьому відрізку спостереження об'єкта моделювання.

Вступ

При математичному моделюванні різних явищ та процесів в системах автоматичного керування (САК), що описуються в будь-якій точці відрізка спостереження спадними функціями з великими або малими за модулем похідними, проявлення жорсткості скоріше правило ніж виняток. Жорсткі системи виникають не тільки при описі динамічних систем автоматичного керування, а і в хімічній кінетиці, електротехніці, економіці, соціології та в інших галузях науки.

Особливістю жорстких систем є наявність коефіцієнта жорсткості, що визначає швидкість зміни функції розв'язку, яка в свою чергу складається з двох складових з великими та малими похідними. При моделюванні таких систем на ЕОМ за допомогою відомих чисельних алгоритмів виникає проблема отриманням достовірних результатів, в яких враховуються обидві складові, оскільки кожна з них розв'язується з різними значеннями кроку інтегрування. Це обумовлено проблемою стійкості обчислювальних методів та алгоритмів.

Аналіз проблеми

Для подолання проблеми стійкості обчислювальних методів та алгоритмів, які використовуються при моделюванні жорстких систем на ЕОМ, існують такі напрямки: по-перше, методологічний, що включає розробку нових математичних моделей та методів моделювання, які забезпечують підвищення стійкості, по-друге, алгоритмічний, що включає розробку ефективних алгоритмів вибору оптимального кроку інтегрування для досягнення компромісу між стійкістю метода і точністю результатів моделювання.

Розглянемо особливості першого напрямку. Для моделювання жорстких систем використовують певні явні та неявні обчислювальні методи та алгоритми. Явні методи, як показано в [1], не можуть розв'язати протиріччя жорстких систем, яке полягає в тому, що малий крок інтегрування необхідний для відтворення швидкоплинних процесів не може бути збільшений, і в подальшому, коли похідна розв'язку стає суттєво меншою початкового значення. Тому, основна складність при чисельному інтегруванні жорстких систем явними методами (Рунге—Кутта, Адамса, прогнозу та корекції) складається в неможливості збільшення кроку інтегрування.

В теперішній час дослідження в області жорстких систем в основному спрямовані на розробку неявних методів, область стійкості яких, як показано в [2], містить всю ліву на-півплощину. Такі методи однокрокові і багатокрокові відносять до A-стійких методів [2]. З однокрокових неявних методів найбільш перспективним з точки зору стійкості, на наш погляд є, S-етапні методи Рунге—Кутта, що в літературі відомі як оптимальні або адаптовані, особливістю яких є визначення S-проміжних значень функції для досягнення заданої точності розв'язку. Так наприклад, для рівняння $y' = f(x)$ при $y(x_0) = y_0$ проміжні значення на одному кроці інтегрування визначаються за формулами

$$\eta_k = y_n + h\sum_{j=1}^{s}\beta_{kj} f\left(\eta_k\right), \tag{1}$$

$$x_{n+1} = y_n + h\sum_{j=1}^{s}\gamma_j f\left(\eta_j\right), \tag{2}$$

де y_n — значення чисельного розв’язку на початку кроку; η_k — k-те проміжне значення чисельного розв’язку в межах одного кроку; y_{n+1} — значення розв’язку в кінці кроку, причому γ_j визначається як розв’язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь виду

$$\sum_{j=1}^{s}\gamma_j \alpha_j^{k-1} = 1/k,\ k = 1, 2, \ldots, s, \tag{3}$$

де α_j — нулі полінома Лежандра s-го степеня, а β_j задовольняють систему рівнянь

$$\sum_{j=1}^{s}\beta_{ij}\alpha_{ij}^{k-1} = \frac{1}{k}\alpha_i^k,\ i, k = 1, 2, \ldots, s. \tag{4}$$

S-етапні методи відносяться до А-стійких тому що, як показано в [1], для них виконується умова стійкості $\left|R(h\lambda)\right| < 1$, яка виключає швидке зростання похибки, що приваблює ці методи для розв’язання складних жорстких систем.

Але практична реалізація S-етапних методів приводить до декількох проблем. По-перше, не повністю визначені правила зміни проміжного кроку інтегрування, по-друге, не визначені межі його зміни. В роботах [1, 2, 3] пропонуються обмеження на величину кроку накладати з умови заданої точності розв’язку, тобто, при достатньо малих значеннях h, крок може бути обраний з умов малості головного члена асимптотичного розкладу локальної похибки методу за степенями h, але це не вирішує вказаних проблем.

Особливістю неявних багатокрокових методів є використання зворотного диференціювання і апроксимації похідної f_{n+k} по (k + 1) значенню y_{n+j} (де $j = 0, 1, \ldots, k$):

$$\sum_{j=0}^{k} a_j y_{n+j} - hb_k f_{n+k} = 0,\ a_k = 1. \tag{5}$$

В роботах [1, 2] показано, що ці методи, відомі в літературі як методи з автоматичним вибором кроку, при $k = 1, 2, \ldots, 6$ забезпечують стійкість чисельного розв’язку для великого класу жорстких систем. При цьому проміжні $(k+1)$ значення розв’язку запам’ятовуються на кожному кроці у вигляді компонент вектора Нордсіка

$$\left(y_n, h_n y_n', \frac{1}{2}h_n^2 y_n'', \ldots, \frac{1}{k!}h_n^k y_n^{(k)}\right).$$

Крок інтегрування в цьому випадку вибирається виходячи з вимог, що похибка апроксимації не перебільшує деякої постійної величини, а методика зміни кроку основана на інтерполяції значень по точках. Такий підхід до інтегрування жорстких систем практично представляє собою стабілізацію стійкості розв’язку на кожному k-му кроці (рис. 1).

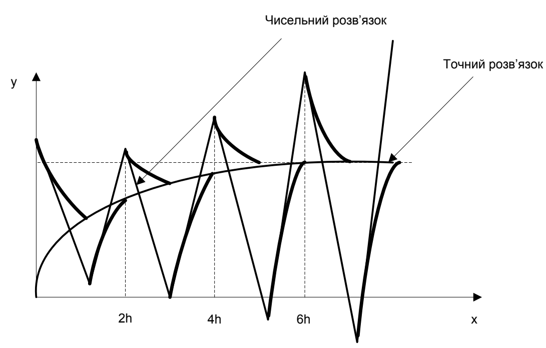

Рис. 1 Графічна ілюстрація забезпечення стійкості чисельного методу розв'язання ЖС

Але, як показано в [3], проблемою неявних багатокрокових методів є зниження стійкості при збільшенні ступеня методу, що призводить до конфлікту між стійкістю методу і точністю розв’язку.

З метою підвищення стійкості явних багатокрокових методів часто використовують матрицю Якобі як джерело додаткової інформації про досліджувану функцію. Ці методи вважаються стійкішими ніж методи диференціювання назад, проте необхідність обчислення матриці Якобі на кожній ітерації і на кожному кроці робить їх дуже трудомісткими при розв’язанні жорстких систем великої розмірності.

При дослідженні задач, що розглядаються в роботі, в математичному пакеті програм MathCad [4] використовуються адаптований алгоритм Рунге—Кутта та неявні алгоритми Розенброка і Буліша—Штерна, які відрізняються підвищеною стійкістю та точністю результатів. Але результати досліджень в [5], показали, що стійкість даних алгоритмів суттєво залежить від вибору початкового значення кроку інтегрування, що суттєво залежить від коефіцієнта жорсткості. Крім того, проблема даних алгоритмів у переповненні програмних структур, що ускладнює аналіз жорстких систем на заданому відрізку дослідження.

Отже, аналіз методологічного та алгоритмічного напрямку підвищення стійкості методів та алгоритмів моделювання жорстких систем показав, що більшість з них мають обмежену область стійкості, використовуються для певного класу жорстких систем, а також є дуже складними і потребують великого обсягу допоміжних обчислень. Крім того, стійкість більшості методів не зв'язується з коефіцієнтом жорсткості системи, проте такий зв'язок існує, що підтверджують результати дослідження, наведені в [5]. Тому питання розробки методів та алгоритмів підвищення стійкості моделювання жорстких систем залишається актуальним.

Підхід до підвищення стійкості методів

На наш погляд, одним з шляхів підвищення стійкості методів моделювання жорстких систем є дослідження залежності стійкості методу від коефіцієнта жорсткості рівняння або системи рівнянь, що підтверджується результатами досліджень, проведених в [5]. Чому? Тому, що, як показали результати дослідження, коефіцієнт жорсткості суттєво впливає на початковий крок інтегрування, вибір якого для більшості методів є складною і окремою задачею. Крім того, дослідження, проведені авторами роботи, показали можливість підвищення стійкості методу моделювання жорстких систем за допомогою включення в алгоритм процедури екстраполяції поведінки досліджуваної функції на основі інформації отриманої при зменшенні кроку інтегрування в проміжних точках. Відомо, що такий підхід використовується в деяких методах (наприклад, в методах прогнозу і корекції).

Для підвищення стійкості методів моделювання жорстких систем доцільно вирішати такі задачі:

— дослідити області стійкості відомих явних та неявних однокрокових або багатокрокових методів моделювання жорстких систем в залежності від коефіцієнта жорсткості та визначити межі найбільшої стійкості кожного з них;

— розробити алгоритм вибору з заданої групи методу (або методів), що забезпечує задану стійкість при заданому коефіцієнті жорсткості досліджуваної системи;

— для підвищення стійкості відомих неявних багатокрокових методів включити в алгоритм методу процедуру екстраполяції поліному, який будується за проміжними значеннями похідної.

Вибір неявних методів пояснюється тим, що область стійкості цих методів, як показано вище, містить всю ліву напівплощину, що характеризує високу стійкість та відповідно перспективність методу. Крім того, використання відомих неявних однокрокових або багатокрокових методів дозволяє отримати та проаналізувати проміжні значення досліджуваної функції при моделюванні швидкозмінної складової розв'язку жорсткої системи з малим кроком інтегрування, який визначається за допомогою певних алгоритмів, а проміжні значення функції можна використати в процедурі екстраполяції полінома, який будується за проміжними значеннями похідної. Так, наприклад, для неявного багатокрокового методу (з автоматичним вибором кроку) можна використати екстраполяційну формулу

$$y'_{n+k} = P(k, n+k, x) = -\frac{1}{h_{n+k}} \sum_{j=0}^{k} \delta_j y_{n+j}, \tag{6}$$

та

$$y^{(0)}_{n+k} = P\left(k, n+k-1, x_{n+k}\right) = \sum_{j=0}^{k} \gamma_j x_{n+j-1}, \tag{7}$$

де коефіцієнти δ_j та γ_j $\left(j = 0, 1, \ldots, k\right)$ залежать від відстані h_{n+j} між абсцисами тих $k+1$ точок, за якими будується поліном $P(k, n+k, x)$. Тому, що для змінних кроків інтегрування h_{n+j} k-крокова формула диференціювання назад порядку k визначає нахил y'_{n+k} як похідну при

$x = x_{n+k}$ від полінома k-го ступеня по x. Причому при оцінці похибки апроксимації можна в точці x_{n+k} обчислювати поліном k-го ступеня, побудований за попередніми $k+1$ точками. Коефіцієнти δ_j та γ_j $(j = 0, 1, \ldots, k)$ визначаються з системи лінійних рівнянь $H_k\left(n-1, x_{n+k}\right)\gamma = e_1$ та $H_k\left(n, x_{n+k}\right)\delta = e_2$, де $e_1^T = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2^T = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, H_k — матриця Вандермонда з елементів

$$\left[H_k\left(m, x_{n+k}\right)\right]_{\nu j} = \left(\frac{x_{n+k} - x_{m+j}}{h_{n+k}}\right)^{\nu}, \qquad i, j = 0, 1, \ldots, k. \tag{8}$$

Такий підхід не потребує значного збільшення кількості обчислювальних операцій для визначення коефіцієнтів δ_j та γ_j. Методика зміни кроку в залежності від складової з великими або з малими похідними досліджуваної функції, наведена нижче у описі методу з екстраполяцією.

Результати дослідження залежності стійкості явних та неявних методів моделювання жорстких систем від їх коефіцієнта жорсткості α показані на рис. 2. Аналіз відносної похибки чисельного розв'язку показав нестійкість явних та неявних методів при збільшенні коефіцієнта жорсткості (відносна похибка розв'язку зростає експоненційно до 80 %). Результати аналізу досліджень зведені в таблицю. Так адаптований метод Рунге—Кутта забезпечує стійкість методів моделювання систем з коефіцієнтами жорсткості не більше 20; методи Гіра 1—2-го порядків забезпечують стійкість для систем з α, що лежить у межах до 100. Стійкішими, як зазначалося вище, є S-етапні та неявні методи, що забезпечують стійкість при коефіцієнтах жорсткості порядку 1000, метод, який запропонований в даній роботі — при $\alpha < 10^6$.

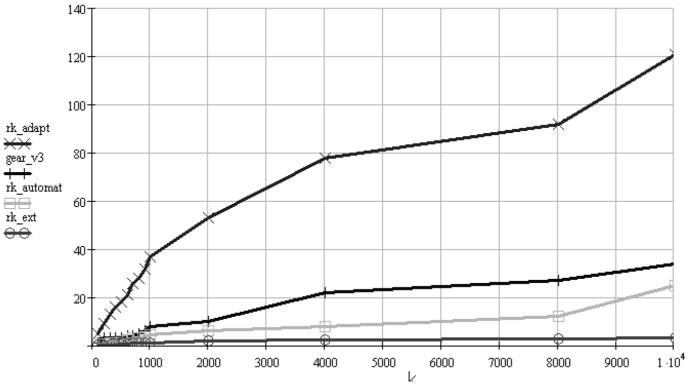

Рис. 2. Залежність відносної похибки від коефіцієнта жорсткості

Залежності стійкості методів від коефіцієнта жорсткості досліджуваних систем

Коефіцієнт жорсткості	Метод	Значення відносної похибки методу
α < 20	Адаптований метод Рунге—Кутта	$\varepsilon = 10^{-3}$
α < 100	Методи Гіра 1, 2-го порядків	$\varepsilon = 10^{-3}$
α < 1000	S-етапні методи	$\varepsilon = 10^{-4}$
$\alpha < 10^6$	Неявний метод Рунге—Кутта з екстраполяцією	$\varepsilon = 10^{-6}$

Неявний метод з екстраполяцією та оптимізацією кроку інтегрування

Запропонований авторами неявний метод підвищення стійкості процесу моделювання жорстких задач включає такі кроки:

— послідовне інтегрування відрізка $[x_i; x_i + h]$ методом Рунге—Кутта з змінними кроками (від h до h/n), де n — параметр методу, та з кроком $h/2$ на відрізку $\left[x_i + h;\ \ x_i + 3h/2\right]$;

— екстраполяція методом рівновіддалених вузлів (метод Ньютона) за ($n-1$) точками обчисленими з кроком h/n в точці $x_i + h$, відповідно (5—7);

— визначення критерію зміни кроку $\min R = \left|y_{ext} - y_k\right|$ на відрізку $\left[x_i;\ \ x_i + h\right]$, де y_{ext} — екстрапольоване значення в точці $x_i + h$; y_k — значення y-ї складової, отриманої в результаті інтегрування досліджуваного відрізка з кроком k де $k = 1 \ldots n$;

— зміна кроку інтегрування відповідно таким правилам, які обираються з умов малого значення головного члена асимптотичного розкладу локальної похибки методу за степенями h:

— якщо $R < \varepsilon$, де ε — задана похибка чисельного розв'язку, крок збільшується в n раз;

— якщо значення функції в точці $x_i + 3h/2$ більше ніж на порядок заданої точності значення функції в точці $x_i + h$, то крок інтегрування змінюється не в n разів, а в $n/2$ раз;

— якщо $\varepsilon < R < 10\,\varepsilon$, то у такому випадку, крок інтегрування збільшується в n/k разів;

— якщо $R > 10\,\varepsilon$, то крок інтегрування зменшується у $n/2$ разів, причому ітерація повторюється без зміни поточного значення x_i.

Важливим параметром запропонованого методу є вибір кількості проміжних етапів інтегрування, в яких проводиться додаткове дослідження поведінки функції розв'язку на кожному відрізку $[x_i;\ x_i + h]$. Експериментально визначені межі вибору даного параметра — (3; 6). Аналіз відносної похибки чисельного розв'язку запропонованого методу (рис. 2) показав, що при значенні параметра S = 4, досягається компроміс між точністю розв'язку, швидкістю і стійкістю методу.

Отже, використання багатокрокової екстраполяції в неявному багатокроковому методі забезпечує стійкість методу незалежно від коефіцієнта жорсткості та відповідно параметрів досліджуваної системи.

Висновок

Стійкість більшості відомих методів, що використовуються для розв'язання жорстких задач, суттєво залежать від коефіцієнта жорсткості та параметрів досліджуваних систем.

В роботі запропонований підхід до підвищення стійкості методів моделювання жорстких систем, в основі якого використовується алгоритм вибору методу моделювання в залежності від коефіцієнта жорсткості системи.

Також для підвищення стійкості методу моделювання пропонується використовувати процедуру багатокрокової екстраполяції поведінки функції на основі інформації, отриманої при зменшенні кроку інтегрування в проміжних точках.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРА

1. Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Т. Численные методы решения жестких систем. — М.: Наука, 1966. — 232 с.

2. Чуа Л. А., Пен-Мин Л. Машинный анализ электронных схем. — М.: Энергия, 1980. — 638 с.

3. Москвіна С. М., Голубєва Т. О. Аналіз алгоритмів розв'язання систем жорстких диференціальних рівнянь у пакетах моделювання систем автоматичного керування // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — № 1. — 2003. — С. 21—25.

4. MathSoft, InC. MathCAD User GUIDE. — Cambridge, MA: 2000. — 692 c.

5. Москвіна С. М., Доманський В. Я., Москвін О. М. Метод підвищення стійкості алгоритмів моделювання жорстких задач // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. — 2006. — № 1(5). — С. 123—128.

Матеріали статті рекомендовані до опублікування оргкомітетом XIII Міжнародної конференції з автоматичного управління (Автоматика-2006, 25—28.09.2006 р.)

Надійшла до редакції 23.11.06
Рекомендована до друку 12.12.06

Москвіна Світлана Михайлівна — доцент, ***Голубєва Тетяна Олександрівна*** — аспірантка.

Кафедра комп'ютерних систем управління;

Москвін Олексій Михайлович — студент Інституту автоматики, електроніки та комп'ютерних систем управління.

Вінницький національний технічний університет