

ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА КОМП'ЮТЕРНА ТЕХНІКА

УДК 681.3:621.375

О. Д. Азаров, д. т. н., проф.;

О. О. Решетнік, студ.;

В. А. Гарнага, студ.;

О. В. Кадук, асп.

ПОХИБКИ КВАНТУВАННЯ В АЦП НА ОСНОВІ НАДЛИШКОВИХ ПОЗИЦІЙНИХ СИСТЕМ ЧИСЛЕННЯ

Проаналізовано похибки квантування АЦП порозрядного ерівноваження із ваговою надлишковістю. Розглянуто основні види надлишкових систем числення і передатних характеристик порозрядних АЦП на їх базі. Проведено аналіз похибок квантування при порозрядному аналого-цифровому перетворенні з використанням комп'ютерного моделювання. Аналіз характеристики вхід-вихід АЦП на базі НПСЧ з дробовими вагами розрядів показує, що існує декілька кроків квантування, зокрема такі, що дорівнюють 1, а також такі, що менші за одиницю. Кількість цих кроків обмежена і детермінована. Доведено, що ймовірність появи похибок квантування в АЦП із дробовими вагами розрядів із значеннями, меншими одиниці, зростає. Густина розподілу похибок квантування при цьому збільшується в околі менших кроків квантування.

Вступ

Визначальною характеристикою аналого-цифрових перетворювачів є передатна, а її важливим параметром — похибка квантування. Квантування може бути рівномірним або нерівномірним, а закон зміни кроку квантування — детермінованим або випадковим [1]. Найпоширенішим є квантування із сталим кроком. Похибка квантування входить до складу загальної методичної похибки аналого-цифрового перетворення, максимальне значення якої є половиною ваги молодшого розряду (математичне сподівання) [2].

Шуми квантування визначають динамічний діапазон вхідного сигналу АЦП, який обчислюється як відношення максимального рівня вхідного сигналу до середньоквадратичного значення шумів квантування. Слід зазначити, що наявність додаткових шумів призводить до втрат динамічного діапазону [2].

АЦП з нерівномірним кроком квантування використовується в апаратурі зв'язку, акустиці та ін. Це дозволяє розширити динамічний діапазон при заданому числі рівнів квантування або зменшити число розрядів вихідного коду без втрати інформації [3].

Актуальність

Традиційно характеристика квантування визначається, як залежність вхід-вихід, тобто відповідність вихідного коду рівню вхідного аналогового сигналу [2]. Ця характеристика є однозначною, якщо кожному вихідному коду відповідає єдиний цифровий еквівалент, тобто код є однозначним. У цьому випадку приріст вхідного сигналу $\Delta A_{вх}$, приводить до зміни вихідної кодової комбінації, цифрові еквіваленти якої відрізняються на один квант.

При цьому слід зазначити, що існує широкий клас надлишкових позиційних систем числення (НПСЧ) [4], у тому числі на основі комбінацій двійкових рядів [5] із багатозначною передатною характеристикою. Відомо, що побудова перетворювачів форми інформації (ПФІ) на базі систем числення з ваговою надлишковістю дозволяє підвищити швидкість аналого-цифрового перетворення, завдяки можливості компенсації досить значних (десятки відсотків) динамічних похибок першого та другого роду. Введення процедур самокоригування та самокалібрування в процес роботи АЦП із ваговою надлишковістю також дозволяє будувати високоточні перетво-

рювачі на основі неточної елементної бази [4].

Водночас характеристики квантування для АЦП із ваговою надлишковістю порозрядного врівноваження вивчені недостатньо. Тому дослідження похибок квантування в перетворювачах форми інформації із ваговою надлишковістю є актуальним.

Метою статті є аналіз похибок квантування АЦП порозрядного врівноваження із ваговою надлишковістю.

Постановка задач

Згідно із зазначеною метою формулюються такі задачі:

- 1) Огляд основних видів надлишкових систем числення і передатних характеристик порозрядних АЦП на їх базі;
- 2) Аналіз похибок квантування при порозрядному аналого-цифровому перетворенні з використанням комп'ютерного моделювання.

Розв'язання задач

В АЦП із ваговою надлишковістю використовуються позиційні системи числення. При цьому, вказані системи числення доцільно поділити на два класи: а) із природним; б) зі штучним розташуванням ваг розрядів. До першого класу слід віднести такі, в яких будь-яке ціле число задається у вигляді:

$$A = \sum_0^{n-1} a_i \alpha^i,$$

де $a_i \in \{0, 1, \bar{1}, 1\}$ — розрядний коефіцієнт, $i = 0, 1, 2, 3 \dots n-1$ — номер розряду, α — основа системи числення, α^i — вага i -го розряду системи числення.

Слід зазначити набір розрядних коефіцієнтів складає алфавіт системи числення. До систем числення із природним розташуванням ваг розрядів належать класична двійкова з $a_i \in \{0, 1\}$, $\alpha = 2, 0$, десяткова, шістнадцяткова, а також НПСЧ на базі «золотих» s - та p -пропорції [5].

У позиційних системах числення зі штучним розташуванням ваг розрядів будь-яке ціле число можна зобразити у вигляді:

$$A = \sum_0^{n-1} a_i Q_i,$$

де $a_i \in \{0, 1, \bar{1}, 1\}$ — розрядні коефіцієнти, i — номер розряду системи числення, Q_i — вага i -го розряду, який входить до набору ваг розрядів або базису з множини $\{Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}\}$.

У системах числення зі штучним розташуванням ваг розрядів відношення α ваг сусідніх розрядів є непостійним. Оскільки у цьому випадку основа α є змінною, то доцільно, вибираючи системи числення, спиратися саме на базис. Співвідношення між вагами сусідніх розрядів $\{Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}\}$ можуть задаватися в різний спосіб.

Слід також зазначити, що ваги надлишкових позиційних систем числення можуть бути дробовими і цілочисловими. До НПСЧ із дробовими вагами розрядів, зокрема, відносяться так звані системи числення «золотих» p - та s -пропорції [4]. Основою для p -систем є додатний корінь характеристичного рівняння

$$x^{p+1} - x^p - 1 = 0.$$

При $p = 0$ дана НПСЧ вироджується у двійкову систему числення, $p = 1$ — систему класичної золотої пропорції ($\alpha \approx 1,618$), $p = \infty$ — одиничний код. Для систем числення s -пропорції характеристичне рівняння має вигляд

$$x^s - \sum_{i=0}^{s-1} x^i = 0.$$

При $s = 1$ НПСЧ вироджується в одиничний код, $s = 2$ — систему «золотої» пропорції, $s = \infty$ — двійкова система числення. Системи числення s та p -пропорції є рекурентними. При цьому вага

старшого розряду дорівнює сумі ваг кількох молодших розрядів (конкретні доданки задаються характеристичним рівнянням). У загальному випадку рекурентні НПСЧ описуються характеристичним рівнянням

$$x^s - \sum_{i=1}^{s-1} m_i x^i - 1 = 0,$$

де s задає максимальну кількість доданків, сума яких дорівнює вазі старшого розряду, причому один з доданків є 1, $\{m_1, m_2, \dots, m_s\}$ — множина розрядних коефіцієнтів, кожен з яких може набувати значень 0 або 1. Наприклад, характеристичне рівняння $x^5 - x^4 - x^2 - 1 = 0$ визначає НПСЧ із основою $\alpha = 1,57$. У загальнішому випадку можна визначити НПСЧ, в яких сума певних розрядів дорівнює сумі деяких інших розрядів, тобто коефіцієнти можуть набувати значень 0, 1 або -1 ,

$$\sum_{i=0}^s m_i x^i = 0.$$

Наприклад, характеристичне рівняння $x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 1 = 0$ визначає НПСЧ із основою 1,443. На відміну від класичної двійкової системи числення, представлення чисел у НПСЧ з дробовими вагами розрядів у вигляді (2) призводить до нерівномірної дискретизації на числовій осі. Водночас непостійне відношення між вагами сусідніх розрядів у НПСЧ p - та s -пропорції із цілочисловими вагами розрядів (наприклад, на основі p -чисел Фібоначі) ускладнює мікроелектронну реалізацію ЦАП паралельної дії [7, 8]. Тому використання такого класу НПСЧ у техніці АЦП і ЦАП обмежене або недоцільне.

Побудова надлишкових числових рядів на базі ненадлишкових двійкових рядів породжує новий широкий клас систем числення із ваговою надлишковістю, [5] серед яких є системи, що мають багатозначність представлення чисел. Це дає можливість побудови надлишкових ЦАП і АЦП з покращеними статичними і динамічними характеристиками на базі традиційних двійкових ЦАП та не вимагає створення оригінальної елементної бази. Прикладом базису вказаних систем числення є такі ряди [5]:

- 1; 1; 2; 2; 4; 4;... 2^{n-1} ; 2^{n-1} ;
- 1; 1,5; 2; 3; 4; 6;... 2^{n-1} ; $1,5 \cdot 2^{n-1}$;
- 1; $\sqrt{2}$; 2; $2\sqrt{2}$; 4; $4\sqrt{2}$;... 2^{n-1} ; $2^{n-1}\sqrt{2}$;
- 1; 2; 3; 4; 8; 12;... 2^{n-2} ; 2^{n-1} ; $2^{n-2} + 2^{n-1}$.

Оскільки характеристика квантування АЦП на основі НПСЧ із дробовими вагами розрядів є нерівномірною, то крок квантування є змінним. Проте набір можливих кроків квантування є обмеженим. Розглянемо характеристику квантування для рекурентної НПСЧ з основою 1,618 ($p = 1$), вигляд якої наведено на рис. 1, а також похибки квантування, розподіл яких по діапазону наведено на рис. 2.

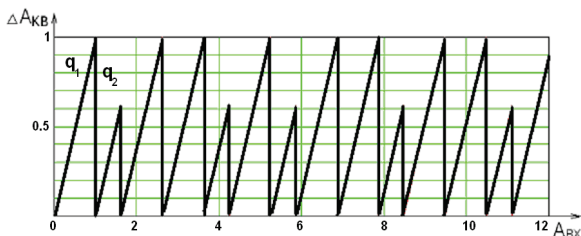


Рис. 2. Похибка квантування АЦП на базі НПСЧ з основою 1,618

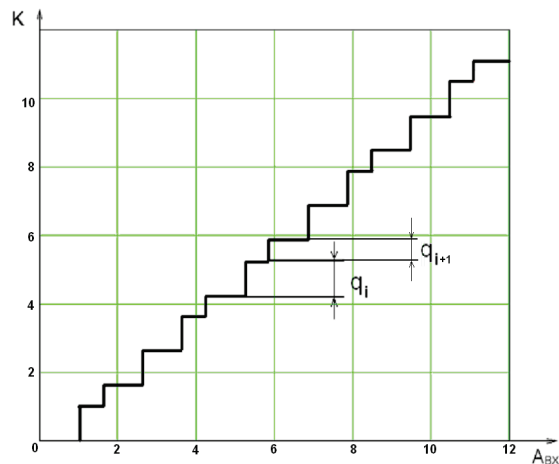


Рис. 1. Характеристика квантування АЦП на основі НПСЧ з основою 1,618

З рис. 1 видно, що в характеристиці квантування є два можливих кроки 1 та 0,618. Це також видно із діаграми похибок квантування (див. рис. 2).

Ідеальна операція квантування описується статичною характеристикою нелінійного елемента, на вхід якого підключено вхідний аналоговий сигнал $A_{ВХ}$, а на виході отримуємо квантований сигнал у вигляді цифрового еквівалента K . По-

хибка квантування при цьому $\Delta A_{КВ} = A_{ВХ} - K$ [6]. Якщо нелінійний елемент здійснює округлення до найближчого меншого квантового рівня, то похибка квантування дорівнює кроку квантування q .

Якщо характеристика нелінійного елемента симетрична відносно осі координат, тобто округлення відбувається до найближчого квантового рівня, то похибка квантування дорівнює $q/2$. Похибка квантування за рівнем функціонально пов'язана зі вхідною величиною: $\Delta A_{КВ} = kq - A_{ВХ}$ при $kq - 0,5q \leq A_{ВХ} \leq kq + 0,5q$ (k – номер інтервалу квантування).

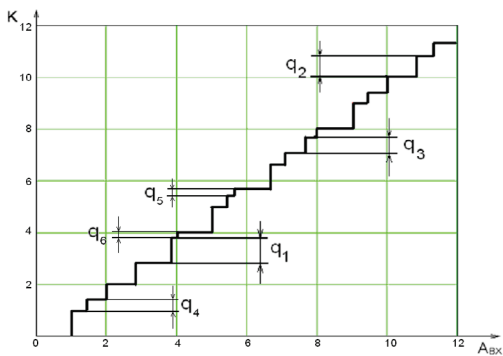


Рис. 3. Характеристика квантування АЦП на основі НПСЧ з основою 1,414

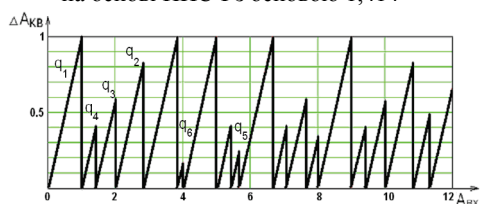


Рис. 4. Похибка квантування АЦП на основі НПСЧ з основою 1,414

Хоча в АЦП на базі рекурентних НПСЧ «золотої» p -пропорції характеристика квантування нерівномірна, але кількість можливих кроків квантування є фіксованою. При цьому можливі такі кроки квантування $q_i \in \{\alpha^0, \alpha^{-1}, \dots, \alpha^{-p}\}$. Наприклад, при $p = 1$ основа системи числення $\alpha \approx 1,618$, а кроки квантування дорівнюють 0,618; 1,00.

Розглянемо характеристику квантування АЦП на основі нерекурентної НПСЧ з постійною основою $\alpha = \sqrt{2} \approx 1,414$ (рис. 3) та діаграму похибок квантування (рис. 4). Причому дана НПСЧ належить до класу двійковопохідних. Характеристика квантування має такі кроки $\{0,172, 0,243, 0,343, 0,414, 0,586, 0,828, 1\}$. Слід відмітити, що для конкретної НПСЧ такі залежності знаходяться як різниця цифрових еквівалентів рівнів квантування, між якими наявні такі кроки квантування (табл.). Наприклад, для НПСЧ з основою $\alpha = \sqrt{2} \approx 1,414$:

Код						K	q	q = f(α)
α ⁵	α ⁴	α ³	α ²	α ¹	α ⁰			
0	0	0	0	0	0	0	1	a ⁰ = 1
0	0	0	0	0	1	1		
.....						1,414	0,414	a ¹ - a ⁰ ≈ 0,414
0	0	0	0	1	0			
.....						2,828	0,828	a ³ - a ² ≈ 0,828
0	0	1	0	0	0			
.....						4,243	0,243	a ³ - a ⁴ + a ¹ ≈ 0,243
0	0	0	1	0	1			
.....						5,656	0,343	a ⁴ - a ⁵ + a ² ≈ 0,343
0	1	0	0	0	0			

Примітка: K — цифровий еквівалент коду, q — крок квантування, q = f(α) — аналітична залежність кроку квантування від основи системи числення.

НПСЧ на основі двійкових рядів можуть бути з цілочисловими та з дробовими вагами розрядів. НПСЧ із цілочисленими вагами розрядів мають характеристику квантування зі сталим кроком, який дорівнює вазі молодшого розряду. НПСЧ із дробовими вагами розрядів мають складну нерівномірну характеристику квантування, особливо, якщо відношення між вагами сусідніх розрядів не є сталим. Особливим випадком є НПСЧ на основі ряду 1; 1,5; 2; 3; 4; 6;... 2ⁿ⁻¹; 1,5 · 2ⁿ⁻¹. Діаграму похибок для цього випадку квантування показано на рис. 5, вона цікава тим, що кроки квантування

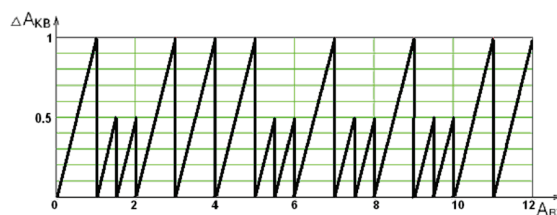


Рис. 5. Похибка квантування АЦП на основі НПСЧ на основі ряду 1; 1,5; 2; 3; 4; 6; ... 2ⁿ⁻¹; 1,5 · 2ⁿ⁻¹

нтування 0,5 розташовані парами.

Характеристика квантування у цьому випадку має два можливих кроки: 1 та 0,5. Причому кроки по 0,5 ідуть парами. Така характеристика квантування повністю збігається із характеристикою квантування двійкової системи числення, проте вона містить додаткові проміжні рівні.

Для нерівномірного квантування можна оцінити методичну похибку таким чином. Нехай кількість рівнів квантування дорівнює N , а множина рівнів квантування є $\{K_1, K_2, \dots, K_k\}$. Діапазон зміни вхідного неперервного аналогового сигналу A_{BX} обмежено $A_{BX0} \dots A_{BXN}$. Причому, A_{BXi} — це значення вхідного сигналу, де відбувається перехід від K_i до K_{i+1} рівня квантування. Для НПСЧ «золотої» пропорції з основою $\alpha \approx 1,618$ можливі два кроки квантування: 1 та 0,618. Наприклад, якщо $n = 6$ у номінальному діапазоні зміни вхідного сигналу характеристика квантування має 13 кроків, які дорівнюють 1, та 8 кроків, рівних 0,618. За результатами комп'ютерного моделювання при $n \rightarrow \infty$ кількість кроків квантування величиною 0,618 дорівнює m , а кроків величиною 1 — $1,618m$.

Густина розподілу ймовірності похибки квантування ΔA_{KBi} при фіксованому рівні квантування K_i та при $K_j - A_{BXi} \leq \Delta A_{KBi} \leq K_j - A_{BXi-1}$ [6]

$$P_{KBi} \left(\frac{\Delta A_{KBi}}{K_i} \right) = \frac{1}{P(K_i)} p_D(K_i - \Delta A_{KBi}).$$

Причому $P(K_i) = \int_{A_{BXi-1}}^{A_{BXi}} p_D(A_{BX}) dA_{BX}$ — ймовірність появи рівня K_i .

Тоді математичне сподівання похибки квантування ΔA_{KBi} на i -му кроці квантування

$$\begin{aligned} \overline{\Delta A_{KBi}} &= \int_{K_j - A_{BXi}}^{K_j - A_{BXi-1}} \frac{\Delta A_{KBi}}{P(K_i)} p_D(K_i - \Delta A_{KBi}) d\Delta A_{KBi} = \int_{A_{BXi-1}}^{A_{BXi}} \frac{K_j - A_{BXi}}{P(K_i)} p_D(A_{BX}) dA_{BX} = \\ &= K_j - \frac{1}{P(K_i)} \int_{A_{BXi-1}}^{A_{BXi}} A_{BX} p_D(A_{BX}) dA_{BX} = K_j - \overline{A_{BXi}}, \end{aligned}$$

де $\overline{A_{BXi}}$ — математичне сподівання вхідного сигналу A_{BX} на i -му кроці квантування.

При цьому математичне сподівання похибки квантування ΔA_{BXi} на всьому діапазоні розраховується усередненням $\overline{A_{BXi}}$

$$\overline{\Delta A_{BX}} = \sum_{i=1}^N K_i \int_{A_{BXi-1}}^{A_{BXi}} p_D(A_{BX}) dA_{BX} - \int_{A_{BX0}}^{A_{BXN}} A_{BX} p_D(A_{BX}) dA_{BX} = \sum_{i=1}^N z_i \int_{A_{BXi-1}}^{A_{BXi}} p_D(A_{BX}) dA_{BX} - \overline{A_{BX}}.$$

Дисперсія похибки квантування ΔA_{BXi} на i -му кроці квантування

$$\overline{\Delta A_{BXi}^2} = \int_{K_j - A_{BXi}}^{K_j - A_{BXi-1}} (\Delta A_{BXi} - \overline{\Delta A_{BXi}})^2 p \left(\frac{\Delta A_{BXi}}{K_i} \right) d\Delta A_{BXi} = \int_{A_{BXi}}^{A_{BXi-1}} \frac{(\Delta A_{BXi} - \overline{\Delta A_{BXi}})^2}{P(K_i)} p_D(A_{BX}) dA_{BX}.$$

А дисперсія по всьому діапазону

$$\overline{\Delta A_{BX}^2} = \sum_{i=1}^N P(K_i) \overline{\Delta A_{BXi}^2} = \sum_{i=1}^N \int_{A_{BXi-1}}^{A_{BXi}} (A_{BX} - \overline{A_{BXi}})^2 p_D(A_{BX}) dA_{BX}.$$

Вибір закону розподілу вхідного сигналу по діапазону квантування та закону розподілу похибки квантування в межах кроку квантування при визначенні загального закону розподілу похибки квантування по діапазону квантування залежить від умов проведення операції квантування. Теорія ймовірності визначає велику кількість законів розподілу та критеріїв їх застосування. Так, якщо дисперсія вхідного сигналу набагато більша квадрату максимального кроку квантування і $K_i = (A_{BXi-1} + A_{BXi})/2$, то розподіл похибки всередині кроку квантування можна прийняти рівномірним. З іншого боку, якщо під час роботи АЦП вхідний неперервний аналоговий сигнал од-

наково розподіляється між двома сусідніми рівнями квантування, то за центральною граничною теоремою розподіл вхідного неперервного аналогового сигналу між двома сусідніми рівнями квантування буде відбуватись за нормальним законом. Незалежно від обраних законів розподілу, у загальному випадку, наявність у характеристиці квантування кроків менших за одиницю (крок квантування АЦП на основі двійкової системи числення) збільшує ймовірність виникнення менших значень похибки квантування за рівнем. Покажемо це на прикладі НПСЧ «золотої» пропорції з основою $\alpha \approx 1,618$ при різних законах розподілу.

Розглянемо випадок, коли закон розподілу вхідного сигналу по діапазону є рівномірним, і закон розподілу похибки квантування в межах кроку квантування також є рівномірним. У цьому випадку закон розподілу похибки квантування по всьому діапазону вхідного сигналу буде таким, як зображено на рис. 6.

Оскільки закон розподілу вхідного сигналу по діапазону є рівномірним, то ймовірність знаходження вхідного сигналу A_{BX} в околі деякого рівня квантування $kq - 0,5q \leq A_{BX} \leq kq + 0,5q$ не залежить від його номера k . У НПСЧ «золотої» пропорції з основою $\alpha \approx 1,618$ є два кроки квантування: 1 та 0,618 з відношенням їх кількості 1,618. Тобто ймовірність потрапляння вхідного сигналу в зону кроку квантування, рівного одиниці, є

$$P_1 = \frac{1,618}{1,618 + 1} = 0,618, \text{ а } P_{0,618} = \frac{1}{1,618 + 1} = 0,382.$$

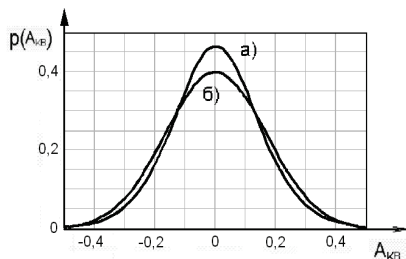


Рис. 7. Закон розподілу похибки квантування при нормальному розподілі для: а) НПСЧ з основою $\alpha \approx 1,618$; б) двійкової системи числення

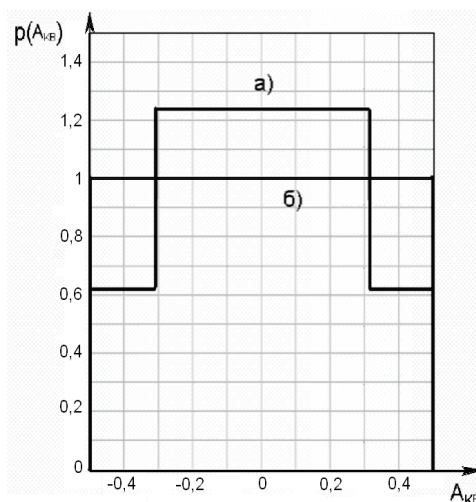


Рис. 6. Закон розподілу похибки квантування при рівномірному розподілі для: а) НПСЧ з основою $\alpha \approx 1,618$; б) двійкової системи числення

Якщо закон розподілу похибки квантування в межах кроку квантування є нормальним, то закон розподілу похибки квантування по всьому діапазону вхідного сигналу буде таким, як зображено на рис. 7.

З рис. 7 видно, що густина розподілу похибок квантування біля нуля зростає для НПСЧ, порівняно з двійковою системою числення. Таке зменшення похибки квантування суттєво впливає на загальну похибку аналого-цифрового перетворення. Тому під час проектування швидкодіючих АЦП із ваговою надлишковістю необхідно враховувати похибки квантування.

Висновки

Аналіз характеристики вхід-вихід АЦП на основі НПСЧ з дробовими вагами розрядів показує, що існує декілька кроків квантування, зокрема такі, що дорівнюють 1, а також такі, що менші одиниці. Кількість цих кроків обмежена і детермінована.

Оскільки розглянута характеристика квантування має декілька кроків, то це суттєво змінює закон розподілу похибки квантування, порівняно з передатною характеристикою АЦП на основі двійкової системи числення, де є лише один крок квантування.

Доведено, що імовірність появи похибок квантування в АЦП із дробовими вагами розрядів із значеннями меншими за одиницю зростає. Густина розподілу похибок квантування при цьому збільшується в околі менших кроків квантування.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гельман М. М. Системные аналого-цифровые преобразователи и процессоры сигналов. — М.: Мир, 1999. — 559 с., ил.
2. Бахтиаров Г. Д., Малинин В. В., Школин В. П. Аналого-цифровые преобразователи / Под ред. Г. Д. Бахтиарова. — М.: Советское радио, 1980. — 280 с., с ил.

3. Брагин А. А., Семенюк А. Л. Основы метрологического обеспечения аналого-цифровых преобразователей электрических сигналов. — М.: Издательство стандартов, 1989, — 600 с., с ил.
4. Азаров О. Д. Основы теории аналого-цифрового перетворення на основі надлишкових позиційних систем числення. Монографія. — Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2004. — 260 с.
5. Азаров О. Д., Решетнік О. О., Захарченко С. М., Лукашук О. О., Харьков О. М. Формування нерозривних передатних характеристик ЦАП і АЦП на основі вагової надлишковості // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. — 2006. — № 3(7). — С. 7—15 с.
6. Баранов Л. А. Квантование по уровню и временная дискретизация в цифровых системах управления. — М.: Энергоатомиздат, 1990. — 304 с., ил.
7. Analog-digital conversion / Edited by Walt Kester / Analog Devices Inc. 2004. 1230 p.
8. Bernard Ginetti, Paul G. A. Jaspers, Fellow, IEEE, and Andre Vandemeulebroecke. A CMOS 13-b Cyclic RSD A/D Converter // IEE JOURNAL OF SOLID-STATE CIRCUIT. — Vol. 27 — No. 7. July 1992. — 957 p.

Рекомендована кафедрою обчислювальної техніки

Надійшла до редакції 7.05.07
Рекомендована до друку 18.05.07

Азаров Олексій Дмитрович — завідувач кафедри; *Кадук Олександр Володимирович* — аспірант.
Кафедра обчислювальної техніки;
Решетнік Олександр Олександрович, Гарнага Володимир Анатолійович — студенти Інституту магістра-тури аспірантури та докторантури.
Вінницький національний технічний університет