УДК 519.65

І. В. Богач, к. т. н., доц.;
Р. Н. Квєтний, д. т. н., проф.;
М. О. Машницький, асп.

МОДЕЛЮВАННЯ ОБ’ЄКТІВ В СФЕРИЧНИХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

Запропоновано підхід до моделювання об’єктів в сферичних системах координат, який, на відміну від класичних, дозволяє моделювати об’єкти, які задані в сферичній системі. Описаний підхід дав можливість зменшити кількість обчислень, потрібних для моделювання таких об’єктів.

Актуальність. Постановка задачі

Моделювання одновимірних об’єктів в просторі є досить актуальною задачею. В останні роки важко не помітити стрімкий розвиток електроніки та техніки, тому саме в наш час виникає проблема моделювання та дослідження об’єктів за допомогою обчислювальної техніки. Під час досліджень об’єкта, який залежить від координат простору, постає задача ідентифікації їх математичних моделей. Для вирішення цієї проблеми потрібно застосовувати саме математичне моделювання, яке об’єднує експеримент та теорію і використовується в таких галузях як медицина, космічні дослідження, геофізика тощо. Це значно розширює області впровадження результатів досліджень крім традиційної комп’ютерної графіки.

Одним з найпоширеніших методів моделювання об’єктів є інтерполяційний метод. На сучасному етапі розвитку науки існують інтерполяційні методи лише для моделювання трьохвимірних об’єктів в декартових системах координат [1]. В статті пропонується модифікація інтерполяційних методів моделювання в полярних системах координат.

Моделювання об’єктів необхідно проводити, коли отримують зображення в задачах різного типу діагностувань, топографії та багатьох інших галузях. На даний момент в цій галузі проводиться активна дослідницька робота провідних компаній з виробництва графічних прискорювачів та виготовлення програмного забезпечення для тривимірного моделювання та спеціальних ефектів.

Метою статті є розширення функціональних можливостей інтерполяційних методів моделювання одновимірних об’єктів простору, які задані в сферичній системі координат.

Координати точки об’єкту в сферичній системі координат задаються за допомогою величин: r — радіус вектор, відстань від полюса системи координат до точки, φ — кут довготи та θ — кут широти.

Задача інтерполяції в сферичній системи координат полягає в тому, щоб по значенням функції $f(\phi,\theta)$ в скінченій кількості точок її області допустимих значень на заданому відрізку відновити аналітичний вигляд функції або знайти її значення в інших точках цього відрізку. Ця задача допускає дуже велику кількість розв‘язків. Задача інтерполяції виникає, наприклад, в тому випадку, коли відомі результати вимірів $r_n = f(\phi_n,\theta_n)$ деякої фізичної величини $f(\phi,\theta)$ у точках (ϕ_i,θ_j), $i=\overline{0,n}, j=\overline{0,n}$ і потребує визначення її в інших точках. Функція, отримана в результаті інтерполяції, називається інтерполяційною. Вона повинна строго задовольняти початковим умовам. Ця якість отриманої функції відрізняє поняття інтерполяції від апроксимації.

Опис методу

Нехай для функції $r_n = f(\phi_n, \theta_n)$ задані значення $r_{ij} = f(\phi_i, \theta_j)$ для рівновіддалених значень незалежних змінних $\phi_i = \phi_0 + ih_\phi$ та $\theta_j = \theta_0 + jh_\theta$, де $(i, j = \overline{1..n})$, h_ϕ, h_θ — крок інтерполювання по куту довготи та куту широти відповідно.

Використовуючи поліноміальні методи згідно з постановкою інтерполяції формули Ньютона, необхідно підібрати поліноми $P(\phi_i, \theta_J)$ ступеня не вище $(n-1)^2$, який для кожної пари (ϕ_i, θ_J) набуває конкретного значення r.

Якщо використати першу інтерполяційну формулу Ньютона для інтерполяції радіуса вектора r, то вона буде мати вигляд

$$P(\phi_i, \theta_J) = r_{00} + q\Delta^{1+0} r_{00} + p\Delta^{0+1} r_{00} + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^{2+0} x_{00} + qp\Delta^{1+1} x_{00} + \frac{p(p-1)}{2!}\Delta^{0+2} x_{00} + \ldots, \tag{1}$$

де $q = \dfrac{\phi - \phi_0}{h_\phi}$, $p = \dfrac{\theta - \theta_0}{h_\theta}$.

Введемо означення узагальненого степеня. Узагальненим степенем числа q та p будемо називати добуток n множників, перший з яких дорівнює q та p відповідно, а кожний з наступних на 1 менше попереднього:

$$\begin{aligned} q^{[n]} &= q(q-1)(q-2)...(q-n+1); \\ p^{[n]} &= p(p-1)(p-2)...(p-n+1). \end{aligned} \tag{2}$$

Якщо використати формули (1), (2) і зробити деякі математичні перетворення, формула (1) буде мати вигляд:

$$P(\phi, \theta) = \sum_{i,j=0}^{n} \frac{q^{[i]} p^{[j]}}{i! \cdot j!} \Delta^{i+j} r_{00}. \tag{3}$$

Аналогічно отримуються інтерполяційні формули для різних типів різниць.

Інтерполяційні формули для моделювання об'єктів в сферичній системі координат

Назва методу	Формула	Узагальнений степінь
Перша інтерполяційна формула Ньютона	$P(\phi, \theta) = \sum_{i,j=0}^{n} \frac{q^{[i]} p^{[j]}}{i! \cdot j!} \Delta^{i+j} r_{00}$	$q^{[n]} = q(q-1)(q-2)\ldots(q-n+1)$; $p^{[n]} = p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)$; де $q = \frac{\phi - \phi_0}{h_\phi}$; $p = \frac{\theta - \theta_0}{h_\theta}$
Друга інтерполяційна формула Ньютона	$P(\phi, \theta) = \sum_{i,j=0}^{n} \frac{q^{[i]} p^{[j]}}{i! \cdot j!} \Delta^{i+j} r_{n-i,n-j}$	$q^{[n]} = q(q+1)(q+2)\ldots(q+n-1)$; $p^{[n]} = p(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)$, де $q = \frac{\phi - \phi_n}{h_\phi}$; $p = \frac{\theta - \theta_n}{h_\theta}$
Перша інтерполяційна формула Гауса	$P(\phi, \theta) = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2n} \frac{(q+s)^{[i]} \cdot (p+d)^{[j]}}{i! \cdot j!} \Delta^{i+j} r_{m,l}$, де $s = \lceil i/2 \rceil - 1$; $d = \lceil j/2 \rceil - 1$; $m = -\lfloor i/2 \rfloor$, $l = -\lfloor j/2 \rfloor$	$(q+m)^{[n]} = (q+m) \times (q+m-1)\ldots(q+m-n+1)$; $(p+m)^{[n]} = (p+m) \times (p+m-1)\ldots(p+m-n+1)$, де $q = \frac{\phi - \phi_0}{h_\phi}$; $p = \frac{\theta - \theta_0}{h_\theta}$
Друга інтерполяційна формула Гауса	$P(\phi, \theta) = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2n} \frac{(q+s)^{[i]} \cdot (p+d)^{[j]}}{i! \cdot j!} \Delta^{i+j} r_{m,l}$, де $s = \lfloor i/2 \rfloor$; $d = \lceil j/2 \rceil$; $m = -\lceil i/2 \rceil$; $l = -\lfloor j/2 \rfloor$	$(q+m)^{[n]} = (q+m) \times (q+m-1)\ldots(q+m-n+1)$; $(p+m)^{[n]} = (p+m) \times (p+m-1)\ldots(p+m-n+1)$, де $q = \frac{\phi - \phi_0}{h_\phi}$; $p = \frac{\theta - \theta_0}{h_\theta}$,

Назва методу	Формула	Узагальнений степінь
Інтерполяційна формула Стірлінга	$P(\phi,\theta)=\sum_{i=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2n}\frac{q^{[i]}\cdot p^{[j]}}{i!\cdot j!}\frac{\Delta^{i+j}r_{m,l}+\Delta^{i+j}r_{s,d}}{2}$, де $m=-\lceil i/2\rceil$; $l=-\lceil j/2\rceil$; $d=-\lfloor j/2\rfloor$; $s=-\lceil i/2\rceil$	$q^{[n]}=q^c(q^2-1^2)\ldots(q^2-(w-1)^2)$; $p^{[n]}=p^c(p^2-1^2)\ldots(p^2-(w-1)^2)$, де $c=\begin{cases}1 \text{ якщо } n=1,\ 3,5,\ldots;\\ 2 \text{ якщо } n=2,4,6,\ldots;\end{cases}$ $w=\lceil n\ /\ 2\rceil$; $q=\frac{\phi-\phi_0}{h_\phi}$; $p=\frac{\theta-\theta_0}{h_\theta}$
Інтерполяційна формула Беселя	$P(\phi,\theta)=\sum_{i=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2n}\frac{q^{[i]}\cdot p^{[j]}}{i!\cdot j!}\frac{\Delta^{i+j}r_{m,l}+\Delta^{i+j}r_{m+1,l+1}}{2}$, де $m=-\lceil i/2\rceil$; $l=-\lceil j/2\rceil$	$q^{[n]}=\left(q-\frac{1}{2}\right)^c q(q-1)(q+1)\times$ $\times(q-2)(q+2)\ldots(q+(w-1))$, $p^{[n]}=\left(p-\frac{1}{2}\right)^c p(p-1)(p+1)\times$ $\times(p-2)(p+2)\ldots(p+(w-1))$, де $c=\begin{cases}1 \text{ якщо } n=1,\ 3,5,\ldots;\\ 2 \text{ якщо } n=2,4,6,\ldots;\end{cases}$ $w=\lceil n\ /\ 2\rceil$; $q=\frac{\phi-\phi_0}{h_\phi}$; $p=\frac{\theta-\theta_0}{h_\theta}$

Висновки

Запропоновано підхід до моделювання об'єктів в сферичній системі координат, який, на відміну від класичних, дозволяє моделювати тривимірні об'єкти, котрі задані за допомогою сферичних координат.

Розглянута математична модель є досить проста та ефективна і може бути використана на практиці під час моделювання об'єктів сферичної системи координат в фізиці, хімії, астрономії, космонавтиці, медицини, металургії, та ін.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Квєтний Р. Н. Моделювання тривимірних поверхонь на основі модифікації різницевого методу Ньютона / Р. Н. Квєтний , М. О.Машницький // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. — 2007. — № 6(25). — С. 225—229.

2. Половко А. М. Интерполяция. Методы и компьютерные технологии их реализации / А. М. Половко, П. Н. Бутусов. — СПб.: БХВ-Петербург, 2004. — 320 с. — ISBN 5-94157-493-2

3. Квєтний Р. Н. Методи комп'ютерних обчислень: [навч. посіб.] / Р. Н. Квєтний. — Вінниця: ВДТУ, 2001. — 148 с.

4. Демидович Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А.Марон. — М.: Лань, 2007. — 664 с. — ISBN 978-5-8114-0695-1

5. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов. — М.: Бином. Лаборатория знаний, 2003. — 632 с. — ISBN 5-94774-060-5.

Рекомендована кафедрою автоматики та інформаційно-вимірювальної техніки

Надійшла до редакції 21.10.08
Рекомендована до друку 20.11.08

Богач Ілона Віталіївна **—** доцент, ***Квєтний Роман Наумович*** — завідувач кафедри, ***Машницький Максим Олександрович*** **—** аспірант.

Кафедра автоматики та інформаційно-вимірювальної техніки, Вінницький національний технічний університет