УДК 519.1(075)

А. А. Борзих, к. ф.-м. н., ст. н. с.

ДЕЯКІ ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ПРО ПЛАНАРНІ ГРАФИ, КАРТИ ОЗНАК ТА ЇХ УЗАГАЛЬНЕННЯ

У задачах моделювання необхідно оцінити можливість створення простого графа до конструювання його графічного подання. Запропоновано метод «конструктивної побудови графа», доведені теореми про граничну кількість можливих непересічних зв'язків для графів з N вузлами на площині і на інших поверхнях. Доведено аналогічні теореми про розфарбування.

Вступ

Будь-яке впорядкування сукупності об'єктів (множина) вводить деяку сукупність зв'язків і/або відносин між ними — структуру. Такий спосіб подання інформації про системи називається структурним способом або способом блок-схем чи мережами.

Можна розглянути загальні геометричні й алгебраїчні властивості мереж, для такого базового поняття, як сукупності точок з'єднаних криволінійними безупинними дугами (ребрами). Слід зауважити, що при такому розгляді дуги (зв'язки) вводяться тільки як парні зв'язки. У цій роботі автор обмежився неорієнтованими й однозначними зв'язками між точками (графи без кратних ребер і петель).

Планарний граф зобразимо системою непересічних ребер на площині. Для наочності моделей роль планарних схем очевидна. Вони будуть об'єктом дослідження, заснованого на ідеї знаходження максимальної кількості зв'язків зі заданими обмеженнями, а не перерахування будь-яких зв'язків між елементами [1].

При цьому такий підхід фактично доповнює набір двох класичних підходів побудови маршрутів (графів) на сукупності вузлів обмежених деякими вимогами обходу (ейлерові або гамільтонові графи) [2].

Постановка питання про максимально можливу кількість зв'язків для деякої кількості рівноправних елементів (вузлів) планарного графа припускає, що граф може бути побудований деяким методом. Проте, у теорії графів зазвичай вирішується питання про планарність вже наявного графа, наприклад, по його матриці суміжності (операційний метод, наприклад, реалізований у [3]) або по наявності в ньому спеціально досліджених підсистем, що не подаються планарним графом (наприклад, графічна умова можливості подання графа як непересічної мережі на площині, у разі відсутності кожного з двох специфічних типів сполучень елементів [4]). Але, практичне використання графічних умов є достатньо складним, оскільки спочатку потрібно побудувати досить складний граф і всі його топологічні перетворення, у тому числі для поверхонь, що не є площинами.

У випадку якщо всі n елементів системи зв'язані один з одним, кількість усіх пар неорієнтованих однозначних зв'язків є комбінаторним показником C_n^2 — кількістю сполучень. З'ясуємо інші показники, які можуть бути важливі для розуміння складності мережі.

Конструктивна побудова можливих графів

Надамо визначення спеціального розробленого нами методу, що називається далі «конструктивна побудова» виявлення можливих графів зв'язків для сукупності вершин (вузлів).

Для аналізу складності зв'язків у мережах використаємо такий спосіб їхньої побудови (випадки незв'язаних точок є виключеними). Спосіб описується в геометричній інтерпретації, оскільки метою дослідження є рішення щодо можливості подання графа після припустимих перетворень у вигляді непересічної мережі на поверхні, тобто саме як можливого геометричного об'єкта. Очевидно, що геометричне правило «конструктивної побудови» може бути перетворено на послідовність перебору вузлів у матриці суміжності.

Правила конструктивної побудови

Довільним чином пронумеруємо всі елементи, що можуть бути зв'язані.

Потім, вишукуємо в обраному порядку всі елементи (точки) і зв'яжемо з них початковий лінійний ланцюг (відрізками прямих на рисунку), з'єднуючи кожну пару елементів (k і $k + 1$); при цьому 1-й елемент виявляється на цьому етапі зв'язаним тільки з другим, а на останньому елементі лінійна процедура закінчується.

Далі зв'яжемо (показані дугами, розташованими нижче і вище лінійки елементів) елементи через один (ясно, що таких зв'язків ще не було раніше).

Також зв'яжемо (не перетинаючи з попередніми зв'язками) елементи «через два», починаючи з крайніх, вище і нижче лінії (зв'язки показані зі зламом). У загальному випадку потім зв'язуємо елементи «через три», «через чотири» і т. д., розташовуючи всі зв'язки нижче або вище лінії, так що до першого й останнього елемента завжди існує підхід ззовні. Останнім буде зв'язок крайніх елементів (першого й останнього).

На рис. 1 наведена ілюстрація конструктивної побудови планарного графа для 6 елементів (а — початок побудови лінійного ланцюга і зв'язків за правилом «через два»; б — заключні етапи побудови).

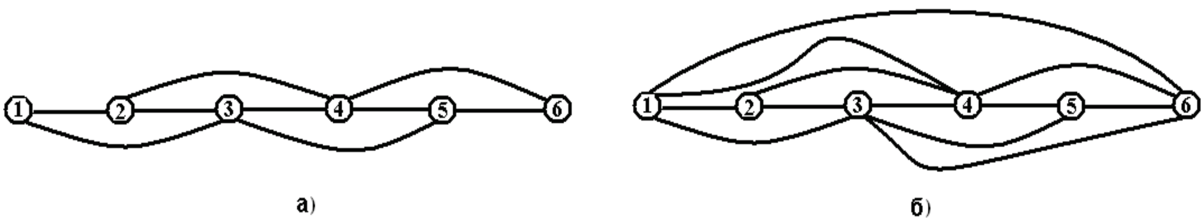

Рис. 1. Метод конструктивної побудови:

а) початок побудови графа; б) повний планарний граф

Зауважимо, що на рис. 1б показані не всі можливі зв'язки, наприклад, відсутній зв'язок між 1 і 5. Але на площині не завжди вдається зв'язати елементи, якщо зв'язки повинні бути непересічними. Допустивши пересічні зв'язки, можна збільшити кількість можливих зв'язків для n елементів (їхнє число для 6 елементів $C_6^2 = 15$). У конструктивному визначенні кількість зв'язків легко рахується (у нашому прикладі воно дорівнює 12).

Основна теорема конструктивної побудови. *Конструктивно побудований граф для будь-якого заданої кількості n* $(n \geq 2)$ *його елементів має максимальне число непересічних зв'язків із усіх можливих графів, побудованих на n упорядкованих елементах на площині.*

Доводиться ця теорема методом від супротивного, тому що за будь-якого порушення цього правила кількість побудованих непересічних зв'язків буде меншою або залишиться тією ж самою.

Конструктивно побудований граф може бути перетворений до іншого топологічно еквівалентного геометричному вигляду.

Властивості і застосовність методу конструктивної побудови для вивчення непересічних зв'язків розкривають також такі леми.

Лема 1. *Кожен зв'язок, проведений при конструктивній побудові, крім перших зв'язків «по лінійці», вилучає зі списку елементів до яких можна підвести зв'язок, що не перетинається з попередніми, рівно один елемент (переводить один елемент у внутрішню область мережі).*

Лема 2. *У конструктивній побудові графа останнім створюється зв'язок між першим і останнім елементами списку.*

Після побудови останнього зв'язку незамкнутими (відкритими для підведення зв'язків) залишаться рівно три елементи: два крайніх і один внутрішній елементи (зверху або знизу, у залежності від проведення зв'язку крайніх елементів).

Доведення лем 1 і 2 засновано на самому принципі побудови «через два», «через три», «через чотири» і так далі до вичерпання.

Лема 3. *У планарному графі з максимально можливою для нього кількістю зв'язків між елементами (вузлами) незамкнутими (що знаходяться на зовнішній границі графа, тобто не охопленими дугами з усіх боків) є три і тільки три елементи.*

Лема є наслідком основної теореми і леми 2.

Узагальнена теорема конструктивної побудови. *Конструктивно побудований граф для будь-якої заданої кількості* n $(n \,\square\, 2)$ *його елементів має максимальну кількість непересічних зв'язків із усіх можливих графів, побудованих на* n *упорядкованих елементах на однозв'язній поверхні в евклідовому просторі* E_3.

Теорема доводиться аналогічно основній теоремі і дозволяє узагальнити поняття планарного графа з непересічними зв'язками на поверхні різних типів (циліндр, конус, куля, тор і т. ін.), що дозволяє вивчати системи зв'язків у відповідних криволінійних координатах.

Планарні графи з максимальною кількістю зв'язків і розбиття площини на області

Структуру теоретичного підходу до оцінки максимально можливої кількості зв'язків задають такі теореми.

Теорема 1. *Максимальна кількість непересічних на площині парних зв'язків у мережі з* n *елементів дорівнює*

$$P = 3n - 2, \text{ де } n \geq 3. \tag{1}$$

Теорема доводиться методом математичної індукції від випадку, що перевіряється, для трьох елементів, а далі, з огляду на леми 1 і 3, для n і $n + 1$ елементів.

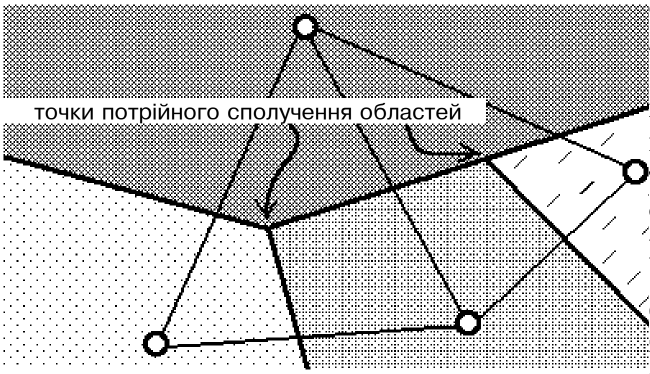

Рис. 2. Задача про розбиття карти ознак і відповідний граф зв'язків

Відома зв'язаність задач про планарні графи і задач про розфарбування карт ознак, призводить до необхідності вивчити властивості розбиттів площини на області. Просту ілюстрацію зв'язку задач наведено на рис. 2.

Проте, граф, що відповідає задачі розбиття поверхні на n частин має менше зв'язків, ніж кількість непересічних зв'язків між n елементами на площині. Можна аналогічно формулі (1) довести таку теорему.

Теорема 2. *Якщо площина в евклідовому просторі розбита на* n *однозв'язних областей, які всі є необмеженими (такими, що містять нескінченну точку), і в такому розбитті мають місце тільки прості випадки сполучення границь областей (точки площини можуть торкатися не більш як 3 області), то максимально можлива кількість границь дорівнює*

$$D = 2n - 3, \text{ де } n \geq 3. \tag{2}$$

Теорема 2 також доводиться методом математичної індукції, починаючи з очевидного випадку трьох областей, а збільшення кількості областей можна подати як розподіл однієї з областей, що існували, на дві (що також містять нескінченну точку), з обмеженням, що нова границя не може починатися у вже наявних точках потрійного торкання.

Узагальнені планарні графи з максимальною кількістю зв'язків і розбиттів поверхонь на області

Мають прикладний сенс і більш глибокі дослідження щодо графів і щодо розфарбування для спеціальних видів поверхонь (на циліндрі, на конусі, на кулі, на торі), що надають додаткові можливості реалізації зв'язків.

Розглянемо відповідні задачі на поверхні нескінченного циліндра (і топологічно еквівалентних йому). Аналогічно теоремам для площини справедливими є такі узагальнення.

Узагальнена теорема 1. *Максимальна кількість непересічних парних зв'язків у графі, розміщеному на однозв'язних поверхнях топологічно еквівалентних площини, а також поверхням циліндра, конуса, сфери, тора в мережі з n елементів дорівнює цієї кількості на площині, тобто*

$$P = 3n - 2 \text{, де } n \geq 3. \tag{3}$$

Проте, теореми про розфарбування (розбиття) будуть відрізнятися від плоского випадку. Розглянемо розфарбування циліндра, поверхня якого може бути представлена як зшитий лист, нескінченний тільки в одному напрямку (і обмежений у другому напрямку).

Теорема 3. *Якщо поверхні нескінченного циліндра розбиті на n однозв'язкових областей, які всі є необмеженими (такими, що містять нескінченну точку), і в такому розбиття мають місце тільки прості випадки сполучення границь областей (точки поверхні можуть торкатися не більш як 3 області), то максимально можлива кількість границь визначається за формулою*

$$D_c = 2(n-1) \text{, де } n \geq 4. \tag{4}$$

Ідеї доведень теорем для поверхонь, що не є площинами, йдуть до досліджень Л. Ейлером задач про правильні багатогранники [5]. Помітимо, що для очевидного випадку $D_c = 1$, якщо $n = 2$ і простого випадку $D_c = 2$, якщо $n = 3$ формула (4) не може бути застосована, через введене обмеження простих сполучень границь.

Наявність виділеної точки (вершини) вказує на особливості задачі про розфарбування конічної поверхні. При цьому, аналогія в результатах буде можлива тільки для поверхні, утвореної обертанням променя, але не прямої. Можливе введення спеціальних вимог до границь у вершині конуса, що нададуть інші результати для максимальної кількості зв'язків. В роботі такі вимоги не розглядаємо, але їхня практична значимість проілюстрована в [6]. Якщо ж вважати, що вершина конуса не має особливих властивостей, то конічна поверхня топологічно еквівалентна площині, і для неї також справедлива теорема 2.

З порівняння результатів цього розділу випливає, що формулювання подібних теорем про максимальну кількість границь при розфарбуванні таких замкнутих поверхонь як поверхні сфери і тора потребує спеціального введення умов еквівалентних умові про нескінченну точку на площині або циліндрі.

Насамкінець необхідно зазначити, що описаний підхід до дослідження графів і задач про розфарбування карт є актуальним для постановки принципових задач математичного й алгоритмічного моделювання, що використовують або аналізують класифікації [7]. А граничні умови існування непересічного графа зв'язків можуть трактуватися як ознака можливої біфуркації умов стану [8].

Висновки

У роботі вводиться клас графів на кінцевій кількості елементів, для яких кількість реалізованих непересічних зв'язків між елементами на однозв'язній поверхні є максимальним. Розроблений придатний до алгоритмізації принцип «конструктивної побудови» таких графів.

Доведено теореми, що створюють структуру теорії даного класу графів. Доведено деякі теореми для задач про розфарбування карт ознак аналогічні задачам про побудову узагальнених планарних графів.

Відомості щодо практичного використання результатів теорем про непересічні графи і про розфарбування карт ознак різних типів, заснованих на даних теоретичних дослідженнях, наведено в [6, 8, 9].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Borzykh A. Principle of modeling by methodology of possible graphs / A. Borzykh // Mathematical modelling of social and economical dynamics: proceeding of the 2nd Inter. Conf. — М. : РУДН, 2007. — С. 25—29. — ISBN 5-201-0323101.

2. Оре О. Теория графов / О. Оре. — М.: Наука, 1980. — 336 с. — ИБ № 11700.

3. The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.9; 2006. — Режим доступу : http://www. gap-system. org/.

4. Мазный Г. Л. Дискретная математика / Г. Л. Мазный, Т. Б. Прогулова. — Дубна : Международный университет природы, общества и человека, 2004. — 284 с. — ISBN 5-7598-03-45-X.

5. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов / Ф. А Новиков. — СПб. : Питер, 2001. — 304 с. — ISBN 5-272-00183-4.

6. Борзых А. А. Математические и эвристические проблемы выбора и анализа сложности моделей социальных явлений / А. А. Борзых // Internet-Education-Science-2008: reports 6-th Inter. Conf., V.1. — Винница: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2008. — С. 20—32. — Режим доступу : http://conf. vstu. vinnica. ua/ies/2008/txt/borzyh_vybor_modelej_soc_yavleniy. pdf. — ISBN 978-966-641-267-9.

7. Краснощеков П. С. Принципы построения моделей / П. С. Краснощеков, А. А. Петров. — М. : Наука, 1983. — 326 с. — ИБ № 44083.

8. Борзых А. А. Модельные концепции и систематика стратегических воздействий как предмет логического анализа / А. А. Борзых // Стратегическое планирование и развитие предприятий: материалы восьмого Всерос. симпозиума. Т. 1 / — М. : ЦЭМИ РАН, 2007.— С. 36—38. — ISBN 978-5-8211-0468-7.

9. Борзых А. А. Математические методы и модели в исследованиях систем / А. А. Борзых. — Курск : Учитель, 2008. — 96 с. — ISBN 5-85170-098-5.

Рекомендована кафедрою вищої математики

Надійшла до редакції 08.09.08
Рекомендована до друку 20.10.08

Борзих Андрій Андрійович — професор кафедри інформаційних систем.
Курський інститут соціальної освіти Російського державного соціального університету