

УДК 519.6

С. М. Левицька, ст. викл.;

А. Т. Дудикевич, канд.фіз-мат. н., доц.;

А. І. Кардаш, канд.фіз-мат. н., доц.

ПОБУДОВА ОДНОРІДНОГО ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА ДЛЯ МЕТОДУ ПРАВОЇ ПРОГОНКИ

Побудовано систолічну структуру для розпаралелювання методу правої прогонки розв'язування системи різницевих рівнянь з тридіагональною матрицею.

Вступ

Ефективний розподіл процесу обчислень між багатьма процесорами й забезпечення їхнього рівномірного завантаження — основна складність паралельного програмування, яке справедливо вважається найбільш складним, ніж послідовне. За умов нерівномірного завантаження деякі процесори можуть проводити більшу частину часу, чекаючи результату обчислень того з них, на який припадає максимальне навантаження, й ефективність всієї системи виявляється вкрай низькою. Необхідно також зазначити, що паралельна програма досить тісно прив'язана до типу паралельної архітектури. Паралельні алгоритми дуже чутливі до нюансів тієї архітектури, для якої вони реалізовані, тому необхідне ретельне узгодження структури програм і алгоритмів з особливостями конкретної паралельної обчислювальної системи. Для повнішої завантаженості процесорів створюються спеціалізовані багатопроцесорні машини, які працюють в реальному часі. Їх ще називають систолічними масивами, орієнтованими на розв'язування задач певного класу. Для таких обчислювальних систем вхідна інформація подається потоком за тактами.

Систолічні масиви ефективно використовуються для обчислення рекурсій, матричного множення, тридіагональних лінійних систем і деяких рівнянь в часткових похідних тощо.

Методи прогонки застосовуються для розв'язування тридіагональних систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Такі системи часто зустрічаються при різницевих апроксимаціях диференціальних рівнянь з другими похідними, наприклад, в рівняннях гармонійних коливань, Гельмгольца, Лапласа, Пуассона, дифузії тощо. Відповідно ефективні методи для розв'язування таких рівнянь лежать в основі числових алгоритмів, наприклад, лінійно-ітераційні методи, такі як методи змінних напрямків, методи верхньої релаксації та їх модифікації.

В роботі розглядається проблема розпаралелювання обчислень за методом правої прогонки на багатопроцесорних машинах в реальному часі. Будується систолічний масив, через який пропускається потік задач, які розв'язуються методом прогонки.

Постановка задачі

Розглянемо задачу

$$\begin{aligned} a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} &= -f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \\ c_0 y_0 - b_0 y_1 &= f_0; \\ -a_n y_{n-1} + c_n y_n &= f_n, \end{aligned} \quad (1)$$

причому $a_i \neq 0$, $b_i \neq 0$ для всіх $i = \overline{1, n}$. Матриця системи (1) є тридіагональною. Вона має вигляд

$$\begin{pmatrix} c_0 & -b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & -c_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -c_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n & c_n \end{pmatrix}, \quad |c_i| \geq |a_i| + |b_i|, \quad i = \overline{1, n-1}; \quad (2)$$

$$\left| \frac{b_0}{c_0} \right| \leq 1; \quad \left| \frac{a_n}{c_n} \right| < 1; \quad \left| \frac{b_0}{c_0} \right| + \left| \frac{a_n}{c_n} \right| < 2.$$

Маємо такі розрахункові формули методу правої прогонки:
 — для прогоночних коефіцієнтів

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - \alpha_i a_i}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \alpha_1 = \frac{b_0}{c_0};$$

$$\beta_{i+1} = \frac{a_i \beta_i + f_i}{c_i - \alpha_i a_i}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \beta_1 = \frac{f_0}{c_0};$$
(3)

— для розв'язку

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 0; \quad y_n = \beta_{n+1}.$$
(4)

Введемо проміжкові позначення

$$q_i = c_i - a_i \alpha_i; \quad z_i = f_i + a_i \beta_i.$$
(5)

Розв'язування системи на систолічному масиві розглянемо для випадку $n = 3$, тобто для системи

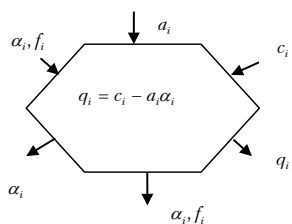
$$\begin{aligned} c_0 y_0 - b_0 y_1 &= f_0; \\ -a_1 y_0 + c_1 y_1 - b_1 y_2 &= f_1; \\ -a_2 y_1 + c_2 y_2 - b_2 y_3 &= f_2; \\ -a_3 y_2 + c_3 y_3 &= f_3. \end{aligned}$$
(6)

Тоді формули для обчислення невідомих y_i відповідно набудуть вигляду

$$\begin{aligned} y_3 &= \beta_4; \quad y_2 = \alpha_3 y_3 + \beta_3; \quad y_1 = \alpha_2 y_2 + \beta_2; \quad y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1; \\ \alpha_1 &= \frac{b_0}{c_0}; \quad \alpha_2 = \frac{b_1}{c_1 - a_1 \alpha_1} = \frac{b_1}{q_1}; \quad \alpha_3 = \frac{b_2}{c_2 - a_2 \alpha_2} = \frac{b_2}{q_2}; \\ \beta_1 &= \frac{f_0}{c_0}; \quad \beta_2 = \frac{f_1 + a_1 \beta_1}{c_1 - a_1 \alpha_1} = \frac{z_1}{q_1}; \quad \beta_3 = \frac{f_2 + a_2 \beta_2}{c_2 - a_2 \alpha_2} = \frac{z_2}{q_2}; \quad \beta_4 = \frac{f_3 + a_3 \beta_3}{c_3 - a_3 \alpha_3} = \frac{z_3}{q_3}. \end{aligned}$$

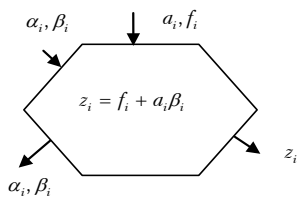
Побудова систолічного масиву

Розглянемо систолічний масив із шестикутних комірок. Основна робота припадає на комірки, що реалізують прямий хід методу прогонки (3), тобто на обчислення величин $q_i, z_i, \alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$.

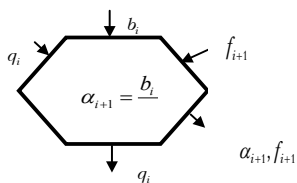


Обчислюються знаменники прогоночних коефіцієнтів; здійснюється транспортна пересилання по вертикалі коефіцієнтів системи a_i і зліва вниз правих частин системи та попередньо обчислених коефіцієнтів α_i .

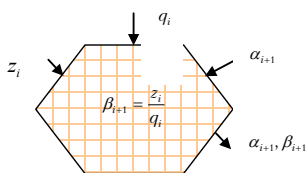
Результати роботи комірки передаються вправо вниз. α_i



Обчислюються чисельники для прогоночного коефіцієнта β_{i+1} . Результати роботи комірки передаються вправо вниз. Здійснюється пересилка вже обчислених прогоночних коефіцієнтів α_i, β_i зліва зверху на зліва вниз.

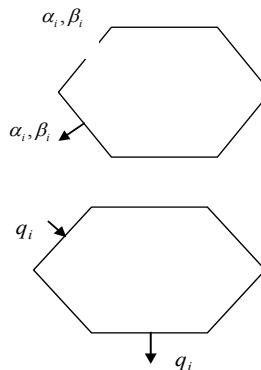
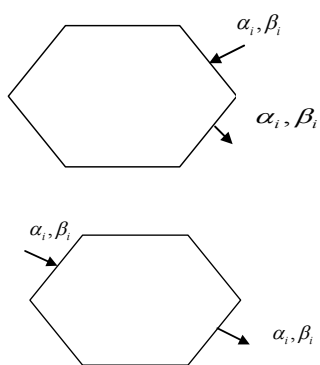


Реалізуються обчислення прогоночних коефіцієнтів α_{i+1} . Результат роботи передається вправо вниз. Комірка здійснює транспортну пересилку знаменників q_i зліва вниз і правих частин системи справа зверху направо вниз.



Реалізується обчислення коефіцієнта β_{i+1} , який передається зліва вниз. Коефіцієнт α_{i+1} пересилається справа зверху на справа вниз.

Для зворотного ходу методу правої прогонки потрібні прогоночні коефіцієнти вже обчислені на попередніх тактах, але розташовані у зворотному порядку. Тому нам потрібно мати комірки, які здійснюють їх пересилання у відповідні точки систолічного масиву для подальшого їх використання. Розглядаються комірки такого вигляду.



Зворотний хід методу прогонки здійснюється за допомогою такої структури:

Результати роботи систолічного масиву отримуються знизу у послідовні моменти часу роботи багатопроекторної системи (рис.).

На першому такті роботи в крайню ліву комірку надходять справа c_0 і зверху b_0 , в результаті чого обчислюється і передається сусідній комірці вправо значення $\alpha_1 = b_0/c_0$, крім того, c_0 передається сусідній комірці вниз.

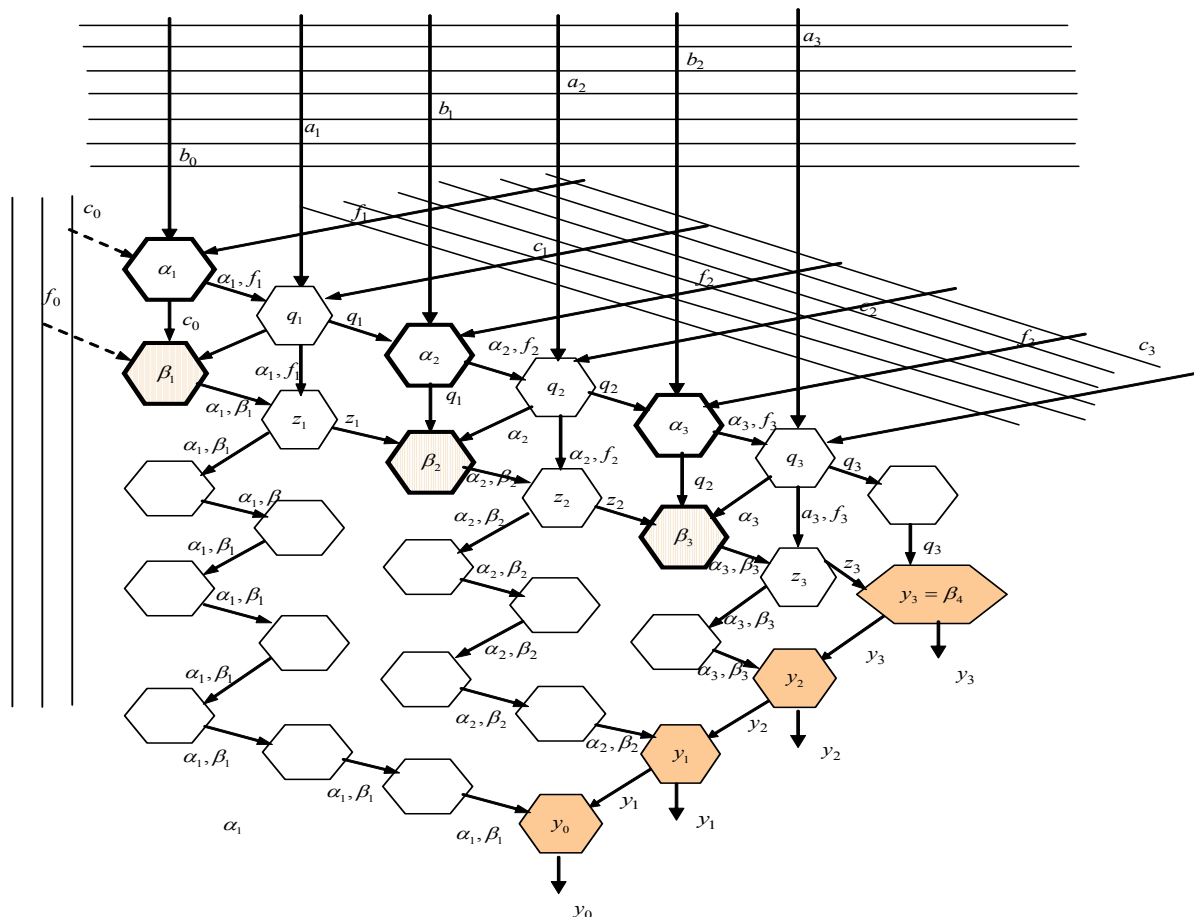
На другому такті працює верхня комірка другого ряду, в яку зверху і справа надходять вхідні дані a_1 та c_1 , а зліва — вже обчислене значення на попередньому такті α_1 . Ця комірка обчислює знаменник для α_1 і β_1 , тобто q_1 .

На третьому такті працюють дві комірки: друга в першому стовпці, яка обчислює β_1 і перша в третьому стовпці, що обчислює α_2 .

На четвертому такті працюють комірки: друга — з другого стовпця, що реалізує обчислення z_1 і перша — з четвертого рядка, яка обчислює q_2 .

Аналогічно працюють усі інші комірки систолічного масиву, тобто в одному такті обчислюють z_i та q_i , в наступному такті — α_{i+1} , β_{i+1} до того часу, поки ми дійдемо до обчислення β_4 , яке і є значенням розв'язку y_3 . Одночасно у відповідних комірках здійснюється пересилка коефіцієнтів α_i та β_i .

Нижній ряд систолічного масиву обчислює за відомими коефіцієнтами α_i та β_i значення розв'язків y_i , $i = \overline{n-1, 0}$. Тобто, через один такт на виході одержимо розв'язки системи різнице-вих рівнянь y_3, y_2, y_1, y_0 . Дана систолічна структура реалізує запропонований алгоритм за 12 тактів, тоді як число тактів при послідовному виконанні операцій дорівнює 30. Згідно [1], досягнуто прискорення в 2,5 разів.



Систолічний масив реалізації методу прогонки

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Воеводин В. В. Математические модели и методы в параллельных процессах / Воеводин В. В. — М. : Наука, 1986. — 296 с.
2. Дудыкевич А. Т. Построение параллельных алгоритмов решения многомерных задач математической физики / А. Т. Дудыкевич, С. М. Левичкая // Pattern Recognition and Image Analysis. — 1994. — Vol. 4, № 3.
3. Цегелик Г. Г. Чисельні методи / Г. Г. Цегелик. — Львів : Вид.центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. — 408 с.

Рекомендована кафедрою автоматики та інформаційно-вимірювальної техніки

Надійшла до редакції 21.10.08
 Рекомендована до друку 20.11.08

Левичка Софія Михайлівна — старший викладач, **Кардаш Андрій Іванович** — доцент,
 Кафедра програмування;
Дудикевич Анна Теодорівна — доцент кафедри обчислювальної математики.
 Львівський національний університет імені Івана Франка