

# АВТОМАТИКА ТА ІНФОРМАЦІЙНО- ВИМІРЮВАЛЬНА ТЕХНІКА

УДК 621.317

О. М. Васілевський, к. т. н., доц.;

А. В. Поджаренко

## ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ВИМІРЮВАННЯ МОМЕНТУ ІНЕРЦІЇ РОТОРА ЗА АМПЛІТУДОЮ КРУТИЛЬНИХ КОЛИВАНЬ

*Наведено експериментальні дані амплітуди крутильних коливань та кутових швидкостей ротора, за допомогою яких здійснюється опосередковане вимірювання моменту інерції. На основі отриманих експериментальних та довідникових даних оцінено стандартні невизначеності як за типом А, так і за типом В, а також знайдено комбіновану та розширену невизначеності вимірювання моменту інерції.*

### Вступ і постановка задачі

Складаючи звіт щодо результату вимірювання фізичної величини, необхідно подати кількісне значення якості результату так, щоб можна було правильно оцінити його надійність. Без такого значення результату вимірювань під час виконання метрологічних робіт не можна порівняти ні між собою, ні з довідниковими величинами. Тому необхідно, щоб була легкоздійснювана і зрозуміла методика для оцінювання характеристики якості результату вимірювання, тобто для оцінювання його невизначеності [1].

Поняття невизначеності як кількісної характеристики є порівняно новим в історії вимірювань, хоч похибка і аналіз похибки давно використовуються в метрологічній практиці. На сьогоднішній день загальновизнано, що, коли вже оцінено всі відомі та допустимі складові похибки і внесено відповідні поправки, все ще залишається невизначеність відносно істинності встановленого результату, тобто сумнів у тому, наскільки точно результат вимірювання відображає значення величини, що вимірюється. Впровадження ДСТУ ISO/IEC 17025-2001 у випробувальних і калібрувальних лабораторіях України зумовило необхідність виконання вимог пункту 5.4.6 цього стандарту «Оцінювання невизначеності вимірювання». Тому розробка методики оцінювання невизначеності результатів вимірювань моменту інерції ротора за амплітудою крутильних коливань є важливою науковою задачею на шляху до взаємного визнання результатів випробувань електродвигунів різних типів в різних країнах світу.

### Викладення основного матеріалу

Модельне рівняння для визначення моменту інерції ротора за амплітудою крутильних коливань має вигляд [2]:

$$J = m \left( \frac{\varepsilon \omega_C^2}{\Omega_p^2 - \omega_C^2} \right)^2 \left( 1 + \frac{1}{A_\phi} \right), \quad (1)$$

де  $m$  — маса ротора;  $\varepsilon$  — ексцентриситет маси ротора;  $\Omega_p$  — власна резонансна частота об'єкта контролю;  $\omega_C$  — середнє значення кутової швидкості;  $A_\phi$  — амплітуда крутильних коливань.

Експериментально досліджувався асинхронний електродвигун з газоманітним підвісом типу АИВТ 803367002. З довідникових даних відомо, що маса ротора такого двигуна складає  $(0,116 \pm 0,0015)$  кг. З робіт [2, 3], відомо, що відносна похибка при вимірюванні максимального ексцентрисите-

ту маси ротора 158 мкм не перевищує 5 %, а власна резонансна частота конічних роторних систем з газоманітним підвісом може складати  $(90 \pm 10)$  Гц.

Експериментальні значення середньоквадратичних відхилень (СКВ) похибки вимірювання кутової швидкості при багаторазових вимірюваннях та різних періодах дискретизації трьох груп спостережень такі:  $\sigma_{\omega 1} = 5,52$  рад/с,  $\sigma_{\omega 2} = 2,11$  рад/с та  $\sigma_{\omega 3} = 1,72$  рад/с.

Оскільки ми маємо три групи багаторазових вимірювань по 1000 спостережень в кожній із груп, то знайдемо середнє арифметичне значення середньоквадратичних відхилень за формулою

$$\bar{\sigma}_{\omega} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sigma_{\omega n} = \frac{5,5246 + 2,1113 + 1,7234}{3} = 3,1198 \text{ рад/с.} \quad (2)$$

Експериментальну невизначеність типу А трьох груп СКВ розрахуємо за формулою

$$u_{A\omega} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (\sigma_{\omega n} - \bar{\sigma}_{\omega})^2} = \sqrt{4,3751} = 2,0917 \text{ рад/с.} \quad (3)$$

Далі визначимо чи є міжгрупова складова дисперсії значною в порівнянні з внутрішньогруповою складовою. Для цього визначимо першу оцінку, яка позначається як  $s_I^2$ , в припущенні того, що міжгрупова дисперсія дорівнює нулю

$$s_I^2 = K u_{A\omega}^2 = \frac{K}{N-1} \sum_{n=1}^N (\sigma_{\omega n} - \bar{\sigma}_{\omega})^2 = 1000 (2,0917)^2 = 4375,1 \text{ (рад/с)}^2. \quad (4)$$

Така оцінка має  $N - 1$  ступенів вільності.

Друга оцінка, позначається як  $s_{II}^2$ , є середньою оцінкою дисперсії, отриманої з  $N$  індивідуальних значень внутрішньогрупової дисперсії. Оскільки структура врівноваження і всі ступені вільності  $\nu_n = K - 1$ , то оцінкою  $s_{II}^2$  є середнє арифметичне  $\sigma_{\omega n}^2(\sigma_{\omega k})$

$$s_{II}^2 = \overline{\sigma_{\omega n}^2(\sigma_{\omega k})} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sigma_{\omega n}^2(\sigma_{\omega k}) = \frac{5,5246^2 + 2,1113^2 + 1,7234^2}{3} = 12,65 \text{ (рад/с)}^2. \quad (5)$$

Друга оцінка має  $N(K - 1)$  ступенів вільності.

Для порівняння оцінок  $s_I^2$  та  $s_{II}^2$  використовують F-тест. Відомо, що F-розподіл складових є розподілом вірогідностей відношення [4]

$$F(\nu_I, \nu_{II}) = \frac{s_I^2(\nu_I)}{s_{II}^2(\nu_{II})} = \frac{4375,1}{12,6496} \approx 346. \quad (6)$$

Оскільки оцінка  $s_I^2(\nu_I)$  є більшою за оцінку  $s_{II}^2(\nu_{II})$ , то це означає, що існує міжгрупова дисперсія і припускається, що вона випадкова. Тоді оцінена дисперсія  $\bar{\sigma}_{\omega}$  отримується з  $u_{A\omega}^2$ , бо вона належним чином відображає як внутрішньогрупову, так і міжгрупову випадкові складові дисперсії. Таким чином, стандартна невизначеність вимірювання кутових швидкостей, що оцінена за типом А буде визначатися за виразом

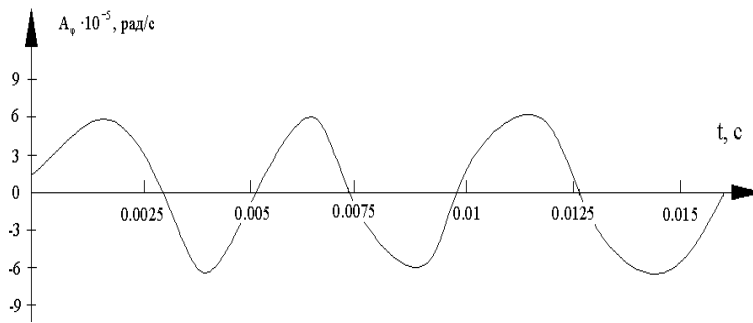
$$u_{A\omega}^2(\bar{\sigma}_{\omega}) = \frac{u_{A\omega}^2}{N}, \quad (7)$$

і з урахуванням (3) буде дорівнювати

$$u_{A\omega}(\bar{\sigma}_{\omega}) = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N (\sigma_{\omega n} - \bar{\sigma}_{\omega})^2}{N(N-1)}} = 1,21 \text{ рад/с.} \quad (8)$$

Експериментальні дані вимірювань крутильних коливань конічного ротора наведені на рисунку. Вибірні вихідного коду АЦП згладжені кубічними сплайнами.

Як видно з рисунку крутильні коливання не перевищують  $\pm 8 \cdot 10^{-5}$  рад/с. Стандартну невизначеність вимірювання крутильних коливань розрахуємо за формулою на основі отриманих експериментальних даних (див. рис.)



Крутильні коливання кінчного ротора  
у газомагнітному підвісі

$$u_{A\phi}(\bar{A}_\phi) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (A_{\phi i} - \bar{A}_\phi)^2}{n(n-1)}} = 7,79 \cdot 10^{-6} \text{ рад/с.} \quad (9)$$

Стандартну невизначеність типу В, що вноситься за рахунок неточного вимірювання маси ротора, в припущенні рівномірного закону розподілу оцінимо за формулою

$$u_{Bm} = \frac{\pm \Delta_m}{\sqrt{3}} = \frac{0,0015}{1,73} \approx 0,87 \cdot 10^{-3} \text{ кг.} \quad (10)$$

Стандартну невизначеність, що вноситься відхиленнями резонансної частоти кінчних роторних систем, в припущенні про нормальний закон розподілу всередині меж, оцінимо за формулою

$$u_{B\Omega} = \frac{\theta_p}{k_p} = \frac{10}{1,96} \approx 5,1 \text{ Гц,} \quad (11)$$

де  $k_p$  — коефіцієнт охоплення для нормального закону розподілу, який дорівнює 1,96 для вірогідності  $P = 0,95$ .

Стандартна невизначеність вимірювання ексцентриситету маси ротора, що оцінена за типом В, в припущенні про нормальний закон розподілу похибки всередині границь, буде дорівнювати

$$u_{B\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{\max} \delta_\varepsilon}{k_p 100\%} = \frac{158 \cdot 5\%}{1,96 \cdot 100\%} \approx 4,03 \text{ мкм.} \quad (12)$$

Комбіновану стандартну невизначеність опосередкованого вимірювання моменту інерції ротора з урахуванням кореляційного зв'язку між кутовою швидкістю та крутильними коливаннями розрахуємо за формулою

$$u_S^2(J) = \left(\frac{\partial J}{\partial \omega_C}\right)^2 u_{A\omega}^2(\bar{\sigma}_\omega) + \left(\frac{\partial J}{\partial A_\phi}\right)^2 u_{A_\phi}^2(\bar{A}_\phi) + \left(\frac{\partial J}{\partial m}\right)^2 u_{Bm}^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial \varepsilon}\right)^2 u_{B\varepsilon}^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial \Omega_p}\right)^2 u_{B\Omega}^2 + 2 \frac{\partial J}{\partial \omega_C} \frac{\partial J}{\partial A_\phi} u_{A\omega}(\bar{\sigma}_\omega) u_{A_\phi}(\bar{A}_\phi) r(\sigma_\omega, A_\phi), \quad (13)$$

де  $\frac{\partial J}{\partial \omega_C} = 4 \frac{m\varepsilon^2 \omega_C^3}{(\Omega_p^2 - \omega_C^2)^2} \left(1 + \frac{1}{A_\phi}\right) + 4 \frac{m\varepsilon^2 \omega_C^5}{(\Omega_p^2 - \omega_C^2)^3} \left(1 + \frac{1}{A_\phi}\right)$  — коефіцієнт чутливості за кутовою

швидкістю, який дорівнює  $-0,467 \cdot 10^{-10}$  кг·с·м<sup>2</sup>/рад з максимальною кутовою швидкістю 10 000 рад/с та з максимальним значенням крутильного коливання  $8 \cdot 10^{-5}$  рад/с та вказаних вище параметрах, що входять у рівняння для визначення моменту інерції;

$$\frac{\partial J}{\partial A_\phi} = -\frac{m\varepsilon^2\omega_C^4}{(\Omega_p^2 - \omega_C^2)^2 A_\phi^2} \text{ — коефіцієнт чутливості за крутильними коливаннями, який дорівнює}$$

—0,455 кг·с·м<sup>2</sup>/рад з аналогічними параметрами роторної системи;

$$\frac{\partial J}{\partial m} = \frac{\varepsilon^2\omega_C^4}{(\Omega_p^2 - \omega_C^2)^2} \left(1 + \frac{1}{A_\phi}\right) \text{ — коефіцієнт чутливості за масою ротора буде дорівнювати } 0,31 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$$

з аналогічними параметрами роторної системи;

$$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon} = 2 \frac{m\varepsilon\omega_C^4}{(\Omega_p^2 - \omega_C^2)^2} \left(1 + \frac{1}{A_\phi}\right) \text{ — коефіцієнт чутливості за ексцентриситетом маси ротора буде}$$

дорівнювати 0,4612 кг·м з аналогічними параметрами роторної системи;

$$\frac{\partial J}{\partial \Omega_p} = -4 \frac{\Omega_p m \varepsilon^2 \omega_C^4}{(\Omega_p^2 - \omega_C^2)^3} \left(1 + \frac{1}{A_\phi}\right) \text{ — коефіцієнт чутливості за власною резонансною частотою}$$

об'єкта контролю буде дорівнювати  $0,83 \cdot 10^{-9}$  кг·с·м<sup>2</sup> з аналогічними параметрами роторної системи;

$r(\sigma_\omega, A_\phi)$  — коефіцієнт кореляції, який згідно з [1] розраховується за формулою

$$r(\sigma_\omega, A_\phi) = \frac{\sum_{k=1}^n (\sigma_{\omega k} - \bar{\sigma}_\omega)(A_{\phi k} - \bar{A}_\phi)}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (\sigma_{\omega k} - \bar{\sigma}_\omega)^2 \sum_{k=1}^n (A_{\phi k} - \bar{A}_\phi)^2}} = -0,9916. \quad (14)$$

Як видно з розрахунків існує сильний кореляційний зв'язок між крутильними коливаннями та кутовою швидкістю ротора. Таким чином, підставляючи розраховані значення коефіцієнта кореляції та коефіцієнтів чутливості у формулу (13), отримаємо оцінку комбінованої невизначеності опосередкованого вимірювання моменту інерції ротора, яка складає  $u_S(J) = 0,4011 \cdot 10^{-5}$  кг·м<sup>2</sup>.

Розширену невизначеність результату опосередкованого вимірювання моменту інерції визначимо за формулою [1]

$$U = t_p(v_{eff}) u_S(J), \quad (15)$$

де  $t_p(v_{eff})$  — коефіцієнт Стюдента для заданого рівня довіри  $p$  і числа ступенів вільності  $v_{eff}$ , що розраховується за виразом

$$v_{eff} = u_S^4(J) / \frac{\left(\frac{\partial J}{\partial A_\phi}\right)^4 u(\bar{A}_\phi)^4 + \left(\frac{\partial J}{\partial \omega_C}\right)^4 u(\bar{\sigma}_\omega)^4}{v_i}, \quad (16)$$

де  $v_i = n - 1$  для невизначеностей, визначених за типом А;  $v_i = \infty$  для невизначеностей, визначених за типом В.

Підставляючи розраховані невизначеності у формулу (16), отримаємо таку кількість ступенів вільності  $v_{eff} = 1638$ . Коефіцієнт Стюдента при такій кількості ступенів вільності та довірчому рівні 0,95 буде дорівнювати 1,96.

Отже, розширена невизначеність опосередкованого вимірювання моменту інерції за амплітудою крутильних коливань на високих кутових швидкостях (до 10 000 рад/с) складає

$$U = \pm 1,96 \cdot 0,4011 \cdot 10^{-5} = \pm 0,7862 \cdot 10^{-5} \text{ кг}\cdot\text{м}^2, \text{ для } p = 0,95.$$

### Висновки

На основі проведених вимірювань кутової швидкості і амплітуди крутильних коливань оцінено комбіновану невизначеність опосередкованого вимірювання моменту інерції ротора та встановлено, що вона не перевищує  $0,4011 \cdot 10^{-5} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$  при ймовірності 0,95 і максимальній кутовій швидкості 10 000 рад/с. Отримана в такий спосіб оцінка моменту інерції може порівнюватися з європейськими результатами досліджень.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Васілевський О. М. Алгоритм оцінювання невизначеності у вимірюваннях при виконанні метрологічних робіт / О. М. Васілевський // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. — № 3(7). — 2006. — С. 147—151.
2. Иосилевич Г. Б. Прикладная механика: для студентов вузов / Г. Б., Иосилевич, П. А. Лебедев, В. С. Стреляев — М.: Машиностроение, 1985. — 576 с. — ISBN 240-5000-000-041.
3. Шнайдер А. Г. Особенности балансировки сверхскоростных мотор-подшипников / А. Г. Шнайдер, Г. З. Шнайдер, В. М. Сокол, Р. В. Селезнева // Автоматизация и современные технологии. — 1995. — № 6. — С. 27—29.
4. Захаров И. П. Теория неопределенности в измерениях: учеб. пособие / И. П. Захаров, В. Д. Кукуш. — Харьков: Консум, 2002. — 256 с. — ISBN 966-7920-24-0.

Рекомендована кафедрою метрології та промислової автоматики

Надійшла до редакції 20.11.08  
Рекомендована до друку 17.12.08

**Васілевський Олександр Миколайович** — доцент кафедри метрології та промислової автоматики.

Вінницький національний технічний університет;

**Поджаренко Андрій Володимирович** — здобувач Національного університету «Львівська політехніка».