УДК 519.652

О. О. Юдін, асп.;
Р. Н. Квєтний, д. т. н. проф.

ОПТИМІЗАЦІЯ ВАГОВИХ КОЕФІЦІЄНТІВ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ NURBS-КРИВИМИ

Розроблено метод оптимізації вагових коефіцієнтів кривої при інтерполяції NURBS-кривими. Цей метод дозволяє розраховувати вагові коефіцієнти, що підвищує точність інтерполяційної кривої. Для розв'язання задачі використано метод багатовимірної інтерполяції.

На сьогоднішній день існує багато методів інтерполяції, за допомогою яких описують різноманітні процеси. Ці методи використовуються майже у всіх наукових галузях діяльності. NURBS-криві є однією з найпотужніших моделей опису кривих, що застосовуються у комп'ютерному моделюванні та різноманітних САПР. Вихідна функція є параметрично заданою багатовимірною кривою [1].

Загальний вигляд NURBS-кривої, побудованої на основі базових функцій Бернстайна, такий:

$$NURBS(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} C_n^i p_i t^i \left(1-t\right)^{n-i} w_i}{\sum_{i=0}^{n} C_n^i t^i \left(1-t\right)^{n-i} w_i}, \tag{1}$$

де w — вектор вагових коефіцієнтів; p — вектор контрольних точок розмірністю n + 1; C_n^i — біноміальний коефіцієнт, який ще називають формулою для обчислення сполучень в комбінаториці; t — параметр.

Прикладом застосування NURBS-кривих у моделюванні можуть бути сучасні пакети програм для тривимірного моделювання (3ds MAX, Softimage XSI, Maya) [2]. Підвищення точності та ефективності застосування NURBS завжди є актуальною задачею. Одним із можливих застосувань інтерполяції є зведення функцій та математичних залежностей до певного виду (інтерполяційної моделі) для спрощення подальшої роботи з ними. Для побудови інтерполяційної функції потрібно задати вузли інтерполяції, які будуть задовольняти умовам задачі інтерполяції. У загальному вигляді NURBS-криві не розв'язують задачу інтерполяції. Це ускладнює у моделювання об'єктів за їх допомогою у просторах з розмірністю більше двох. Можливість вільного вибору вагових коефіцієнтів дозволяє будувати криві різної точності. При побудові інтерполяційних кривих NURBS для функцій існує задача автоматизації процесу зменшення похибки інтерполяції [3].

Метою статті є підвищення ефективності інтерполяції функцій на основі підходу інтерполяції NURBS-кривою за рахунок оптимізації вагових коефіцієнтів кривої.

Задачею є інтерполяція функції в заданих точках за допомогою NURBS та пошук вагових коефіцієнтів, що максимально точно інтерполюють її в інших точках області визначення.

В цій статті розглянуто інтерполяція заданої функції за допомогою NURBS-кривої у багатовимірному просторі.

Через те, що NURBS-криві не розв'язують задачу інтерполяції (контрольні точки, крім першої та останньої, не лежать на кривій), потрібно підібрати відповідні контрольні точки, щоб крива проходила через вузли інтерполяції (рис. 1). Шукані контрольні точки, що задають інтерполяційну криву, можна отримати, розв'язавши систему лінійних рівнянь [3]:

$$A_{i,j} = C_n^j t_i^j \left(1-t_i\right)^{n-j} w_j \ , \quad B_i^k = y_i^k \sum_{j=0}^{n} C_n^j t_i^j \left(1-t_i\right)^{n-j} w_j \ , \tag{2}$$

де y^k — вектор вузлів інтерполяції для k-ї просторової координати; A — матриця коефіцієнтів; B^k — вектор вільних членів для k-ї просторової координати.

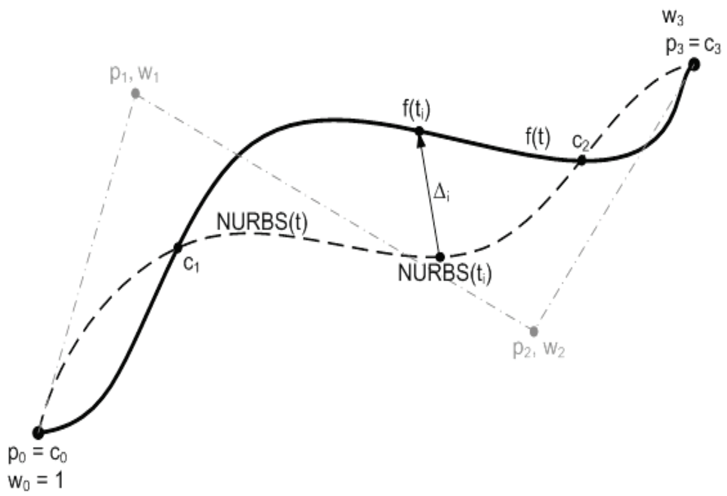

Рис. 1. Застосування NURBS для розв’язання задачі інтерполяції

Розглянувши матрицю коефіцієнтів А, можна сказати, що вона не залежить від значень інтерполяційних вузлів, що дозволяє застосувати її для вирішення задачі пошуку контрольних точок усіх просторових координат. Для розв’язання задачі у багатовимірному просторі доцільно скористатися методом Гаусса—Жордана.

Метод Гаусса—Жордана є модифікацією методу Гаусса для розв’язання систем лінійних рівнянь. Цей метод зводить матрицю коефіцієнтів до діагонального вигляду. При цьому виключенню піддаються не тільки рядки, розташовані нижче головної діагоналі, але й ті, що розташовані вище. Цей метод полегшує отримання розв’язку, хоча й супроводжується збільшенням обсягу розрахунків [4].

Прямий хід методу Гаусса—Жордана потребує виконання більшої кількості обчислювальних операцій, при кожній ітерації їх кількість не зменшується, на відміну від методу Гаусса. Але, використовуючи цей метод, обернений хід, в якому розраховується вектор розв’язків системи, значно спрощується. Ця методика дозволяє за один прохід розв’язати задачу пошуку контрольних точок для усіх просторових координат багатовимірного простору, через те, що матриці аргументів будуть для них однаковими. Виключення коефіцієнтів у прямому ході методу потрібно проводити над матрицею (3).

$$G = \left[A\, B^0\, B^1 \ldots B^{k-1} \right] = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \ldots & a_{0n} & b_0^0 & b_0^1 & \ldots & b_0^{k-1} \\ a_{10} & a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1^0 & b_1^1 & \ldots & b_1^{k-1} \\ & & . & . & . & & & \\ a_{n0} & a_{n1} & \ldots & a_{nn} & b_n^0 & b_n^1 & \ldots & b_n^{k-1} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

де k — розмірність простору, для якого розраховується крива; B^i — вектор-стовпчик вільних членів системи для i-ї розмірності простору.

Зведення лівої частини матриці G не тільки до діагонального, але й до виду одиничної матриці дозволить отримати розв’язок у правій частині матриці, як показано у формулі (4).

$$G_e = \left[ES^T \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & s_0^0 & s_0^1 & \ldots & s_0^{k-1} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & s_1^0 & s_1^1 & \ldots & s_1^{k-1} \\ & & . & . & . & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & s_n^0 & s_n^1 & \ldots & s_n^{k-1} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

де k — розмірність простору, для якого розраховується крива; S — матриця, кожний вектор-стовпчик якої є відповідним розв’язком — контрольною точкою кривої.

Обчислювальна складність прямого ходу алгоритму Гаусса оцінюється $O(n^3)$ [4]. Виходячи з вигляду матриці G (формула 3), розширення задачі шляхом збільшення простору на один порядок (додавання одного стовпчика в матрицю G) не призведе до значного ускладнення задачі в цілому.

Варіюючи значеннями вагових коефіцієнтів, можна отримати різні раціональні криві, що розв’язують задачу інтерполяції.

Однією з властивостей NURBS є те, що вагові коефіцієнти задають силу впливу контрольних точок на криву. Тобто крива, отримана за допомогою векторів вагових коефіцієнтів w та cw, де c — константа, буде однаковою [5].

Для розв’язання поставленої задачі інтерполяції потрібно відшукати такі вагові коефіцієнти, при яких крива буде інтерполювати вихідну функцію з найменшою похибкою. Оптимальне значення вагових коефіцієнтів можна знайти шляхом мінімізації. Враховуючи властивість відносності вагових коефіцієнтів у відношенні один до одного, пошук усіх вагових коефіцієнтів призведе до отримання виродженої задачі, яка має безліч розв'язків. Уникнути цього можна, прийнявши перший ваговий коефіцієнт рівним одиниці і спростивши задачу до пошуку решти вагових коефіцієнтів. Першим кроком для розв'язання поставленої задачі є побудова цільової функції, виходячи з якої і будуть отримані шукані вагові коефіцієнти. Цільова функція (5) побудована за методом найменших квадратів (МНК), як сума норм векторів різниць (відхилень) значень вихідної функції f в проміжних точках між вузлами інтерполяції та значень інтерполяційної NURBS кривої, побудованої із заданими ваговими коефіцієнтами. Таким чином зведення максимальних відхилень до мінімуму шляхом мінімізації цільової функції і буде розв'язком задачі.

$$Ls(w) = \sum_i \left\|\Delta_i\right\|_2^2, \tag{5}$$

де $\Delta_i = \Delta(\tilde{t}_i) = f(\tilde{t}_i) - NURBS(\tilde{t}_i)$; $\tilde{t}$ — вектор проміжних точок.

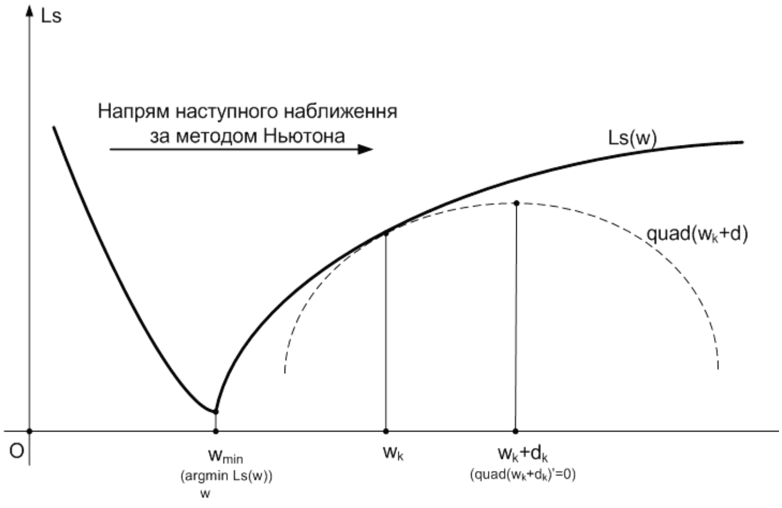

Рис. 2. Обґрунтування розбіжності методу Ньютона для розглядуваної задачі

Нелінійний вигляд часткових похідних цільової функції відносно вектора вагових коефіцієнтів для МНК призводить до системи нелінійних рівнянь, отримання та вирішення якої досить складна задача. Отже, в цьому випадку доцільно використовувати числові методи багатовимірної оптимізації.

Неможливість використання методу Ньютона для оптимізації цільової функції легко пояснити, виходячи з її вигляду та особливостей методу оптимізації. При апроксимації цільової функції квадратичною функцією при певному наближенні метод Ньютона дає напрям, протилежний напряму зменшення функції, і тому метод розбігається (рис. 2).

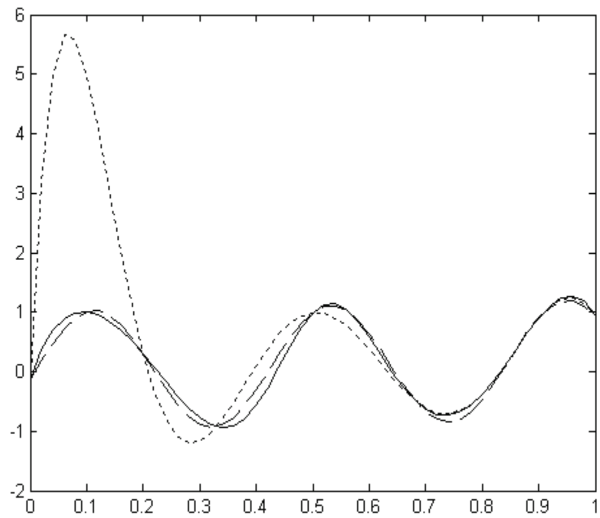

Рис. 3. Результати інтерполяції: суцільна лінія — NURBS-кривою, пунктирна — за поліномом Лагранжа, штрихова — оригінальна функція

Інші методи оптимізації також не можуть бути застосовані, через те, що вони призначені для пошуку мінімуму функцій з неперервними частинними похідними і тому приводять до першого результату, що знаходиться на лінії розриву похідної [6].

Виходячи з цього, за метод мінімізації було обрано метод пошуку мінімумів функцій, які мають розриви частинних похідних. Цей метод є методом першого порядку та використовує три початкові наближення. Обраний метод дає досить швидку збіжність в умовах поставленої задачі. Цей метод базується на пошуку мінімуму за трьома наближеннями з використанням векторів антиградієнту функції та поступовій ротації точок наближення, що забезпечує збіжність методу [6].

Результати роботи розробленого методу порівнювались з результатами інтерполяції поліномом Лагранжа для різних видів функцій. На рис. 3 показано порівняльні графіки інтерполяційних функцій для тригонометричної функції для восьми заданих вузлів інтерполяції. Також отримано числові значення похибок інтерполяції. У порівнянні з інтерполяцією з використанням поліномому Лагранжа запропонований метод дає результат для тригонометричних та раціональних функцій.

Висновок

Підхід до побудови кривих дозволяє застосовувати підвид NURBS-кривих, побудованих на базових функціях Бернстайна, для розв'язання задачі інтерполяції. Отриманий розв'язок може бути застосований для побудови траєкторій руху об'єктів у просторі з урахуванням часу як параметра, а також для розв'язання інших складніших параметричних інтерполяційних задач. При цьому контрольні точки задаються безпосередньо на інтерполяційній кривій, що значно спрощує роботу з цим видом кривих при їх просторовому моделюванні. Використання методу для побудови кривих дає можливість швидкого та ефективного розв'язання поставленої задачі без суттєвого збільшення складності розрахунків зі зростанням розмірності задачі. Враховуючи можливість зміни вектора вагових коефіцієнтів, побудовано функцію похибки за методом найменших квадратів, яка має розриви частинних похідних у точці мінімуму. В результаті дослідження методів оптимізації було використано метод оптимізації першого порядку, який дозволяє знаходити мінімум функцій, що мають розриви першої частинної похідної першого роду. Цей метод дозволяє уникнути усіх обмежень, які були наведені для класичних методів при вирішенні поставленої задачі оптимізації. В результаті проведеного дослідження було побудовано модель для інтерполяції функцій за допомогою NURBS-кривих для багатовимірного простору. Розроблений метод розширює область застосування NURBS для просторів з великою розмірністю та дозволяє підвищити точність інтерполяції.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Rogers An Introduction to NURBS: With Historical Perspective / David F. — Computer Science, 2001. — 343 p.

2. Кристофер 3D-пакеты: 2008/2009 / Кристофер // Компьютерная газета A-Z № 48. — 2008. — Режим доступу до журналу: http://www.nestor.minsk.by/kg/2008/48/kg84804.html

3 Юдін О. О. Інтерполяція NURBS–кривими в багатовимірному просторі / О. О. Юдін // Наукові праці ВНТУ № 4. — 2008. — Режим доступу до журналу: http://www.nbuv.gov.ua/e-journals/VNTU/2008-4/2008-4.files/uk/08ooyims_uk.pdf.

4. Гергель В. П. Теория и практика параллельных вичислений / В. П. Гергель. — М: Бином. Лаборатория знаний, 2007. — 423 с.

5. Юдин О. А. Расширение интерполяции по Лагранжу с использованием кривых Безье / О. А. Юдин // Нові технології 2005. — № 3 (9). — 2005. — С. 117–120.

6. Юдін О. О. Пошук мінімуму функцій, які мають розриви частинних похідних / О.О. Юдін // Наукові праці ВНТУ № 2. — 2008. — Режим доступу до журналу: http://www.nbuv.gov.ua/e-journals/VNTU/2008-2/2008-2.files/uk/08oayopd_uk.pdf

Рекомендована кафедрою автоматики та інформаційно-вимірювальної техніки

Надійшла до редакції 18.05.09
Рекомендована до друку 1.06.09

Квєтний Роман Наумович — завідувач кафедри, ***Юдін Олег Олександрович*** — аспірант.

Вінницький національний технічний університет