ФУНДАМЕНТАЛЬНІ НАУКИ

УДК 691.31.536.21

В. І. Риндюк, к. ф-м. н., доц.;
Т. О. Міщук, студ.,
С. В. Риндюк, студ.

АВТОМАТИЗАЦІЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДВОВИМІРНОГО НЕОДНОРІДНОГО БАГАТОШАРОВОГО СЕРЕДОВИЩА

Запропоновано методику моделювання теплотехнічного розрахунку двовимірного багатошарового середовища з урахуванням внутрішнього джерела енергії та граничних умов третього роду за допомогою інтегрального методу прямих. Отримані рекурентні формули для наближеного розв'язку дозволяють автоматично формувати для різних меж інтегрування основних рівнянь теплопровідності відповідні системи диференційних рівнянь при компоновці матеріалів та граничних умов першого і другого роду. Багатоваріантність розв'язку задачі для різних меж інтегрування дозволяє впевнитись в його достовірності, добираючи необхідні матеріали багатошарового середовища.

Вступ

В зв'язку з ростом цін на заходи енергозбереження у всьому світі і зменшенням запасів енергоресурсів в будівництві все гостріше стає проблема дослідження теплопровідності різноманітних матеріалів в поєднанні їх одного з другим. Метою їх компонування є зменшення теплопровідності стін житлових будинків та інших будівельних споруд. Добре відомим фактом є той, що через стіни житлових будинків втрачається близько половини тепла.

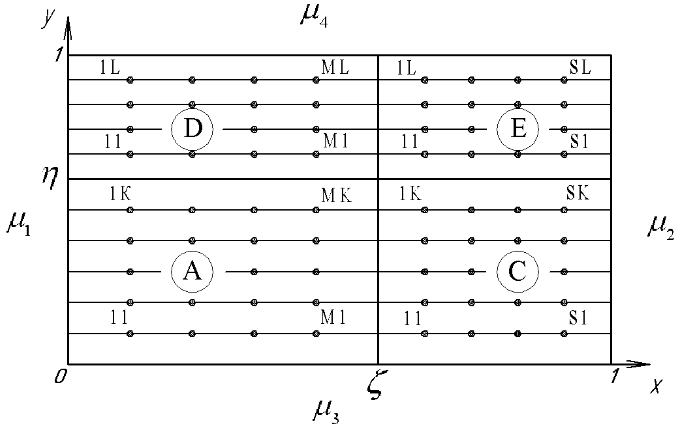
Збільшення товщини стін для підвищення термічного опору призводить до перевитрат будівельних матеріалів, тому використовують відповідні теплоізоляційні матеріали у поєднанні з легкими кам'яними матеріалами.

В роботах [1, 2] розглянуто методику теплотехнічного розрахунку багатошарового середовища в одновимірному і двовимірному випадку з урахуванням граничних умов першого роду за допомогою інтегрального методу прямих. Разом з тим теплотехнічний розрахунок двовимірних багатошарових середовищ потребує детальнішого аналізу з урахуванням граничних умов другого та третього роду.

Постановка задачі, визначальні співвідношення

Метою роботи є (знаходження рекурентних формул) автоматизація розв'язання задачі двовимірної теплопровідності неоднорідного багатошарового середовища з урахуванням граничних умов першого, другого та третього роду за допомогою інтегрального методу прямих [3].

Для моделювання теплопровідності вважатимемо, що досліджуване середовище складається з чотирьох частин з різними коефіцієнтами теплопровідності, що сприймають змінні теплові потоки на зовнішніх межах і містять в собі джерела теплоти (рисунок).



Розрахункова схема теплопровідності двовимірного неоднорідного середовища

Задача зводиться до розв'язання такого рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[a(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right]+f(x,y,t), \tag{1}$$

де коефіцієнт теплопровідності $a(x,y)$ має значення

$$\begin{aligned}&a_A, 0<x<\zeta, 0<y<\eta;\ a_D, 0<x<\zeta, \eta<y<1;\\ &a_C, \zeta<x<1, 0<y<\eta;\ a_E, \zeta<x<1, \eta<y<1;\end{aligned} \tag{2}$$

в області $\{x,y,t\}$, $0<x<1$, $0<y<1$, $x\neq\zeta$, $y\neq\eta$, яка задовольняє початковій умові

$$u(x,y,0)=\phi(x,y), \tag{3}$$

умовам на межах границь

$$\begin{aligned}&\alpha_1 u(0,y,t)+\beta_1\frac{\partial u(0,y,t)}{\partial x}=\mu_1,\quad \alpha_2 u(1,y,t)+\beta_2\frac{\partial u(1,y,t)}{\partial x}=\mu_2;\\ &\alpha_3 u(x,0,t)+\beta_3\frac{\partial u(1,0,t)}{\partial y}=\mu_3,\quad \alpha_4 u(x,1,t)+\beta_4\frac{\partial u(x,1,t)}{\partial y}=\mu_4\end{aligned} \tag{4}$$

і умовам спряження

$$u\Big|_{x=\zeta-0}=u\Big|_{x=\zeta+0};\ u\Big|_{y=\eta-0}=u\Big|_{y=\eta+0}; \tag{5}$$

$$a_A\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\zeta-0}=a_C\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\zeta+0};\ a_C\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\eta-0}=a_E\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\eta+0}; \tag{6}$$

$$a_D\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\zeta-0}=a_E\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\zeta+0};\ a_A\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\eta-0}=a_D\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\eta+0}. \tag{7}$$

Для числового розв'язання задачі (1—7) по осі x вводиться сітка відповідно з кроком

$$h_{Ax}=h_{Dx}=\frac{\zeta}{M+1},\ h_{Cx}=h_{Ex}=\frac{1-\zeta}{S+1}.$$

Відносно осі y на інтервалах (0, η) і (η, 1) введемо сітку з кроком

$$h_{Ay}=h_{Cy}=\frac{\eta}{K+1},\quad h_{Dy}=h_{Ey}=\frac{1-\eta}{L+1}.$$

Наближений розв'язок системи рівнянь (1—7) будемо шукати у вигляді квадратичного полінома

$$\begin{aligned}&P_{mk}(x,x_m,y,y_k,t)=\sum_{i,j=0}^{2}A_{ij}(t)(x-x_m)^i(y-y_k)^j,\ x\in[0,\zeta],\ y\in[0,\eta];\\ &P_{sk}(x,x_s,y,y_k,t)=\sum_{i,j=0}^{2}C_{ij}(t)(x-x_s)^i(y-y_k)^j,\ x\in[\zeta,1],\ y\in[0,\eta];\\ &P_{ml}(x,x_m,y,y_l,t)=\sum_{i,j=0}^{2}D_{ij}(t)(x-x_m)^i(y-y_l)^j,\ x\in[0,\zeta],\ y\in[\eta,1];\\ &P_{sl}(x,x_s,y,y_l,t)=\sum_{i,j=0}^{2}E_{ij}(t)(x-x_s)^i(y-y_l)^j,\ x\in[\zeta,1],\ y\in[\eta,1],\end{aligned} \tag{8}$$

де $k=\overline{1,K}$, $m=\overline{1,M}$, $l=\overline{1,L}$, $s=\overline{1,S}$.

Проінтегруємо (1) на інтервалах

$$[x_{mk}-\alpha_{mk}h_{Ax},x_{mk}+\alpha_{mk}h_{Ax}],\ \ [y_{mk}-\alpha_{mk}h_{Ay},y_{mk}+\alpha_{mk}h_{Ay}];$$
$$[x_{sk}-\alpha_{sk}h_{Cx},x_{sk}+\alpha_{sk}h_{Cx}],\ \ [y_{sk}-\alpha_{sk}h_{Ay},y_{sk}+\alpha_{sk}h_{Ay}];$$
$$[x_{ml}-\alpha_{ml}h_{Dx},x_{ml}+\alpha_{ml}h_{Dx}],\ [y_{ml}-\alpha_{ml}h_{Dy},y_{ml}+\alpha_{ml}h_{Dy}];$$
$$[x_{sl}-\alpha_{sl}h_{Ex},x_{sl}+\alpha_{sl}h_{Ex}],\ [y_{sl}-\alpha_{sl}h_{Ey},y_{sl}+\alpha_{sl}h_{Ey}],$$

з урахуванням наближеного розв’язку (8), де α_{mk}, α_{sk}, α_{ml}, α_{sl} — числові коефіцієнти, отримаємо таку систему $M\times K+S\times K+M\times L+S\times L$ лінійних звичайних диференційних рівнянь відносно A_{00}^{mk}, C_{00}^{sk}, D_{00}^{ml}, E_{00}^{sl}

$$\begin{aligned}
&\dot{A}_{00}^{mk}+\frac{\alpha_{mk}^2h_{Ax}^2}{3}\dot{A}_{20}^{mk}+\frac{\alpha_{mk}^2h_{Ay}^2}{3}\dot{A}_{02}^{mk}=2a_AA_{20}^{mk}+2a_AA_{02}^{mk}+\Phi_A^{mk};\\
&\dot{C}_{00}^{sk}+\frac{\alpha_{sk}^2h_{Cx}^2}{3}\dot{C}_{20}^{sk}+\frac{\alpha_{sk}^2h_{Cy}^2}{3}\dot{C}_{02}^{sk}=2a_CC_{20}^{sk}+2a_CC_{02}^{sk}+\Phi_C^{sk};\\
&\dot{D}_{00}^{ml}+\frac{\alpha_{ml}^2h_{Dx}^2}{3}\dot{D}_{20}^{ml}+\frac{\alpha_{ml}^2h_{Dy}^2}{3}\dot{D}_{02}^{ml}=2a_DD_{20}^{ml}+2a_DD_{02}^{ml}+\Phi_D^{ml};\\
&\dot{E}_{00}^{sl}+\frac{\alpha_{sl}^2h_{Ex}^2}{3}\dot{E}_{20}^{sl}+\frac{\alpha_{sl}^2h_{Ey}^2}{3}\dot{E}_{02}^{sl}=2a_EE_{20}^{sl}+2a_EE_{02}^{sl}+\Phi_E^{sl},
\end{aligned}\qquad(9)$$

де Φ — подвійний інтеграл від $f(x, y)$ на відповідному інтервалі інтегрування;

$$k=\overline{1,K},\ \ m=\overline{1,M},\ \ l=\overline{1,L},\ \ s=\overline{1,S}.$$

Для розв’язання отриманої системи перепишемо (3) з урахуванням (8):

$$\begin{aligned}
&P_{mk}\left(x_m,x_m,y_k,y_k,0\right)=A_{00}^{mk}\left(0\right)=u\left(x_m,y_k,0\right);\\
&P_{sk}\left(x_s,x_s,y_k,y_k,0\right)=C_{00}^{sk}\left(0\right)=u\left(x_s,y_k,0\right);\\
&P_{ml}\left(x_m,x_m,y_l,y_l,0\right)=D_{00}^{ml}\left(0\right)=u\left(x_m,y_l,0\right);\\
&P_{sl}\left(x_s,x_s,y_l,y_l,0\right)=E_{00}^{sl}\left(0\right)=u\left(x_s,y_l,0\right).
\end{aligned}\qquad(10)$$

Підставляючи (8) в (4), (5) і враховуючи умови неперервності температури на межах інтервалів розбиття відповідно на (0, ζ)×(0, η), (ζ, 1)×(0, η), (0, ζ)×(η, 1) і (ζ, 1)×(η, 1), отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів поліномів (8). Після її розв’язання знаходимо рекурентні вирази для коефіцієнтів A_{20}^{mk}, A_{02}^{mk}, C_{20}^{sk}, C_{02}^{sk}, D_{20}^{ml}, D_{02}^{ml}, E_{20}^{sl}, E_{02}^{sl}, так як вони входять в систему (9)

$$A_{20}^{1k}=\left[\mu_1h_{Ax}+A_{00}^{2k}\left(\gamma_1h_{Ax}-\beta_1\right)-A_{00}^{1k}\left(2\gamma_1h_{Ax}-\beta_1\right)\right]\Big/\left(2\gamma_1h_{Ax}^3-3\beta_1h_{Ax}^2\right),\ \ k=\overline{1,K};$$

$$D_{20}^{1l}=\left[\mu_1\cdot h_{Ax}+D_{00}^{2l}\left(\gamma_1\cdot h_{Ax}-\beta_1\right)-D_{00}^{1l}\left(2\gamma_1\cdot h_{Ax}-\beta_1\right)\right]\Big/\left(2\gamma_1\cdot h_{Ax}^3-3\beta_1\cdot h_{Ax}^2\right),\ \ l=\overline{1,L};$$

$$E_{20}^{Sl}=\left[\mu_2\cdot h_{Cx}-E_{00}^{S-1,l}\left(\gamma_2\cdot h_{Cx}+\beta_2\right)-E_{00}^{Sl}\left(2\gamma_2\cdot h_{Cx}+\beta_2\right)\right]\Big/\left(2\gamma_2\cdot h_{Cx}^3+3\beta_2\cdot h_{Cx}^2\right),\ \ l=\overline{1,L};$$

$$C_{20}^{Sk}=\left[\mu_2\cdot h_{Cx}-C_{00}^{S-1,k}\left(\gamma_2\cdot h_{Cx}+\beta_2\right)-C_{00}^{Sk}\left(2\gamma_2\cdot h_{Cx}+\beta_2\right)\right]\Big/\left(2\gamma_2\cdot h_{Cx}^3+3\beta_2\cdot h_{Cx}^2\right),\ \ k=\overline{1,K};$$

$$A_{02}^{m1}=\left[\mu_3\cdot h_{Ay}+A_{00}^{m2}\left(\gamma_3\cdot h_{Ay}-\beta_3\right)-A_{00}^{m1}\left(2\gamma_3\cdot h_{Ay}-\beta_3\right)\right]\Big/\left(2\gamma_3\cdot h_{Ay}^3-3\beta_3\cdot h_{Ay}^2\right),\ \ m=\overline{1,M};$$

$$C_{02}^{s1}=\left[\mu_3\cdot h_{Ay}+C_{00}^{s2}\left(\gamma_3\cdot h_{Ay}-\beta_3\right)-C_{00}^{s1}\left(2\gamma_3\cdot h_{Ay}-\beta_3\right)\right]\Big/\left(2\gamma_3\cdot h_{Ay}^3-3\beta_3\cdot h_{Ay}^2\right),\ \ s=\overline{1,S};$$

$$D_{02}^{mL}=\left[\mu_4\cdot h_{Dy}+D_{00}^{m,L-1}\left(\gamma_4\cdot h_{Dy}+\beta_4\right)-D_{00}^{mL}\left(2\gamma_4\cdot h_{Dy}+\beta_4\right)\right]\Big/\left(2\gamma_4\cdot h_{Dy}^3+3\beta_4\cdot h_{Dy}^2\right),\ \ m=\overline{1,M};$$

$$E_{02}^{sL} = \left[\mu_4 \cdot h_{Dy} + E_{00}^{s,L-1} \left(\gamma_4 \cdot h_{Dy} + \beta_4 \right) - E_{00}^{sL} \left(2\gamma_4 \cdot h_{Dy} + \beta_4 \right) \right] \Big/ \left(2\gamma_4 \cdot h_{Dy}^3 + 3\beta_4 \cdot h_{Dy}^2 \right), \; s = \overline{1,S};$$

$$A_{20}^{mk} = \frac{A_{00}^{m-1,k} - 2A_{00}^{mk} + A_{00}^{m+1,k}}{2h_{Ax}^2}, \begin{cases} m = \overline{2, M-1}; \\ k = \overline{2, K}; \end{cases} \quad D_{20}^{ml} = \frac{D_{00}^{m-1,l} - 2D_{00}^{ml} + D_{00}^{m+1,l}}{2h_{Ax}^2}, \begin{cases} m = \overline{2, M-1}; \\ l = \overline{2, L}; \end{cases}$$

$$E_{20}^{sl} = \frac{E_{00}^{s-1,l} - 2E_{00}^{sl} + E_{00}^{s+1,l}}{2h_{Cx}^2}, \begin{cases} s = \overline{2, S-1}; \\ l = \overline{2, L}; \end{cases} \quad C_{20}^{sk} = \frac{C_{00}^{s-1,k} - 2C_{00}^{sk} + C_{00}^{s+1,k}}{2h_{Cx}^2}, \begin{cases} s = \overline{2, S-1}; \\ k = \overline{2, K}; \end{cases} \tag{11}$$

$$A_{02}^{mk} = \frac{A_{00}^{m,k-1} - 2A_{00}^{mk} + A_{00}^{m,k+1}}{2h_{Ay}^2}, \begin{cases} m = \overline{2, M}; \\ k = \overline{2, K-1}; \end{cases} \quad D_{02}^{ml} = \frac{D_{00}^{m,l-1} - 2D_{00}^{ml} + D_{00}^{m,l+1}}{2h_{Dy}^2}, \begin{cases} m = \overline{2, M}; \\ l = \overline{2, L-1}; \end{cases}$$

$$E_{02}^{sl} = \frac{E_{00}^{s,l-1} - 2E_{00}^{sl} + E_{00}^{s,l+1}}{2h_{Dy}^2}, \begin{cases} s = \overline{2, S}; \\ l = \overline{2, L-1}; \end{cases} \quad C_{02}^{sk} = \frac{C_{00}^{s,k-1} - 2C_{00}^{sk} + C_{00}^{s,k+1}}{2h_{Ay}^2}, \begin{cases} s = \overline{2, S}; \\ k = \overline{2, K-1}; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A_{20}^{Mk} = \Big[& -2A_{00}^{Mk} \left(3h_{Ax}^2 a_C^2 + 3h_{Cx}^2 a_A^2 + 10 a_A a_C h_{Ax} h_{Cx} \right) + 4C_{00}^{1k} a_C h_{Ax} \left(h_{Ax} a_C + 3a_A h_{Cx} \right) - \\ & - C_{00}^{2k} a_C h_{Ax} \left(3a_A h_{Cx} + a_C h_{Ax} \right) + A_{00}^{M-1,k} \left(11 a_A a_C h_{Ax} h_{Cx} + 3a_C^2 h_{Ax}^2 + 6a_A^2 h_{Cx}^2 \right) \Big] \Big/ \\ & \Big/ \left[6h_{Ax}^2 \left(3a_A h_{Cx} + a_C h_{Ax} \right) \left(a_A h_{Cx} + a_C h_{Ax} \right) \right]; \end{aligned}$$

$$C_{20}^{1k} = \frac{4a_A h_{Cx} A_{00}^{Mk} - 2\left(h_{Ax} a_C + 3a_A h_{Cx} \right) C_{00}^{1k} + C_{00}^{2k} \left(2a_C h_{Ax} + 3a_A h_{Cx} \right) - A_{00}^{M-1,k} a_A h_{Cx}}{6h_{Cx}^2 \left(a_A h_{Cx} + a_C h_{Ax} \right)}, \; k = \overline{1, K};$$

$$A_{02}^{mK} = \frac{3\left(a_A h_{Dy} + a_D h_{Ay} \right) D_{00}^{m1} + A_{00}^{m,K-1} \left(2a_A h_{Dy} + a_D h_{Ay} \right) - 6A_{00}^{m,K} \left(a_A h_{Dy} + a_D h_{Ay} \right) - a_D h_{Ay} D_{00}^{m2}}{6h_{Ay}^2 \left(a_A h_{Dy} + a_D h_{Ay} \right)};$$

$$D_{02}^{m1} = \frac{-\left(6a_A h_{Dy} + 2a_D h_{Ay} \right) D_{00}^{m1} + \left(3a_A h_{Dy} - 2a_D h_{Ay} \right) D_{00}^{m2} + A_{00}^{m,K-1} a_A h_{Dy}}{6\left(a_A h_{Dy}^3 + a_D h_{Ay} h_{Dy} \right)}, \; m = \overline{1, M}.$$

Для отримання коефіцієнтів C_{02}^{sK} і E_{02}^{s1} в формулах для A_{02}^{mK} і D_{02}^{m1} необхідно замінити коефіцієнти a_A, a_D, A_{00} і D_{00} відповідно на a_C, a_E, C_{00} і E_{00} та індекс m при коефіцієнтах A_{00} і D_{00} на s; для коефіцієнтів D_{02}^{M1} і E_{20}^{1l} в формулах для A_{02}^{Mk} і C_{20}^{1k} необхідно замінити коефіцієнти a_A, a_C, A_{00} і C_{00} відповідно на a_D, a_E, D_{00} і E_{00} та індекси k на l.

Після цього знайдені коефіцієнти підставляємо в (9) та отримуємо систему $M \times K + S \times K + M \times L + S \times L$ лінійних диференційних рівнянь відносно коефіцієнтів A_{00}^{mk}, C_{00}^{sk}, D_{00}^{ml}, E_{00}^{sl}.

З урахуванням початкових умов (10) запишемо дану систему в такій матричній формі:

$$\dot{R}_{00} = \alpha R_{00} + \beta \psi + \Phi, \tag{12}$$

де $\dot{R}_{00} = \left\{ \dot{A}_{00}^{m,k}, \dot{C}_{00}^{s,k}, \dot{D}_{00}^{m,l}, \dot{E}_{00}^{s,l}, \right\}^T$, $R_{00} = \left\{ A_{00}^{m,k}, C_{00}^{s,k}, D_{00}^{m,l}, E_{00}^{s,l}, \right\}^T$, $\psi = \psi\left(\mu_k, \dot{\mu}_k \right)$. α, β — відповідні матриці з числовими коефіцієнтами при стовпцях R_{00} і ψ, Φ — матриця-стовпець подвійних інтегралів від $f(x, t)$.

Для поліпшення розв’язку числові коефіцієнти α_{ij} знайдемо з умови того, що наближені розв’язки (8) при $t = 0$ із урахуванням початкових умов (3) задовольняли б рівняння (1):

$$\begin{aligned}
&\overset{\bullet}{A}{}_{00}^{m,k}(0)=\varphi_{xx}(x_m,y_k)+\varphi_{yy}(x_m,y_k)+f(x_m,y_k,0), \quad m=\overline{1,M};\quad k=\overline{1,K};\\
&\overset{\bullet}{C}{}_{00}^{s,k}(0)=\varphi_{xx}(x_s,y_k)+\varphi_{yy}(x_s,y_k)+f(x_s,y_k,0), \quad s=\overline{1,S};\quad k=\overline{1,K};\\
&\overset{\bullet}{D}{}_{00}^{m,l}(0)=\varphi_{xx}(x_m,y_l)+\varphi_{yy}(x_m,y_l)+f(x_m,y_l,0), \quad m=\overline{1,M};\quad l=\overline{1,L};\\
&\overset{\bullet}{E}{}_{00}^{m,l}(0)=\varphi_{xx}(x_m,y_l)+\varphi_{yy}(x_m,y_l)+f(x_m,y_l,0), \quad m=\overline{1,M};\quad l=\overline{1,L}.
\end{aligned} \tag{13}$$

З урахуванням (13) і (12) отримаємо систему $M\times K + S\times K + M\times L + S\times L$ незалежних алгебраїчних рівнянь відносно відповідних числових коефіцієнтів α_{ij} та з врахуванням знайдених коефіцієнтів α_{ij} розв'язуємо (12), наприклад, за методом Рунге-Кутта і знаходимо покращені розв'язки у відповідних вузлових точках розбиття інтервалів неоднорідного середовища з граничними умовами третього роду. Розв'язок системи можна отримати при таких значеннях α_{ij}:

$\alpha_{ij} = 0$ — розв'язок аналогічний звичайному методу сіток;

$\alpha_{ij}^2 = 0{,}5$ — розв'язок аналогічний покращеному методу сіток;

$\alpha_{ij} = 1$ — звичайний інтегральний метод [3].

З урахуванням різних значень α_{ij} та отримання відповідних розв'язків, можна робити висновок про їх достовірність, що особливо важливо у випадку осциляцій функцій. Практика показує, що з малим числом вузлів при $\alpha_{ij} = 0$ розв'язок задачі отримуємо з великою похибкою.

Висновки

1. Запропонована методика дозволяє аналізувати та отримувати достовірні розв'язки задачі з урахуванням значень коефіцієнта α_{ij} і вибирати для дослідження структури, які після відповідних розрахунків є оптимальними з теплотехнічної точки зору для різноманітних технічних систем.
2. Алгоритм розв'язання задачі застосовується для задач з урахуванням граничних умов першого, другого та третього роду в режимі створеної загальної програми розрахунку на електронно-обчислювальних машинах.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Риндюк В. І. Методика теплотехнічного розрахунку багатошарового середовища / В. І. Риндюк, Т. В. Прилипко // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2003. — № 3. — С. 35—38. — ISSN — 1997–9266.
2. Риндюк В. І. Моделювання теплопровідності двомірних неоднорідних багатошарових середовищ / В. І. Риндюк, А. М. Власенко, С. В. Риндюк // Сучасні технології, матеріали і конструкції в будівництві. Науково-технічний збірник. — 2006. — № 3. — С. 105—111.
3. Рындюк В. И. Применение улучшенного интегрального метода прямых к решению задач теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом / В. И. Рындюк // Ред. Инженерно-физический журнал. — Минск, 1989 — 9 с. деп. в ВИНИТИ 30.02.89, № 2069-В.
4. Риндюк В. І. Моделювання процесу теплопровідності двовимірного тришарового середовища / В. І. Риндюк, Т. О. Міщук, С. В. Риндюк // Сучасні технології, матеріали і конструкції в будівництві. Науково-технічний збірник. — 2008. — № 5. — С. 99 — 103.

Рекомендована кафедрою теплогазопостачання

Надійшла до редакції 28.04.09
Рекомендована до друку 01.09.09

Риндюк Володимир Іванович — доцент кафедри теплогазопостачання; ***Міщук Тетяна Олексіївна*** — студентка Інституту магістратури, аспірантури та докторантури; ***Риндюк Світлана Володимирівна*** — студентка Інституту будівництва, теплоенергетики та газопостачання.

Вінницький національний технічний університет