

АВТОМАТИКА ТА ІНФОРМАЦІЙНО- ВИМІРЮВАЛЬНА ТЕХНІКА

УДК 531.7.08

Ю. Г. Ведміцький;

В. В. Кухарчук, д-р техн. наук, проф.

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРОДИНАМІЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ВИМІРЮВАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ МОМЕНТУ ІНЕРЦІЇ. ПЕРША ТА ДРУГА ЕЛЕКТРОДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ

Робота є другою з циклу статей з розвитку загальних теоретичних засад електродинамічного моделювання вимірювального перетворення моменту інерції механічних та електромеханічних систем з обертальною формою руху [1].

Подано систему узагальненого перетворювача моменту інерції (УПМІ) і на основі його математичної моделі за допомогою теорії динамічних аналогій побудовано першу й другу електродинамічні моделі, розроблено їх структурні та електричні схеми, отримано диференціальні рівняння руху в формі рівнянь Лагранжа–Максвелла, а також досліджено питання адекватності цих моделей процесу перетворення моменту інерції та визначена область їх застосування.

Вступ

Потужним напрямком аналітичного й експериментального досліджень процесу вимірювального перетворення моменту інерції є його *електродинамічне* моделювання [1].

З одного боку, це пов'язано зі самими досліджуваними системами перетворювачів — їх механічною чи електромеханічною природою. Адже часто розв'язання проблемних задач, що постають під час теоретичного пошуку чи натурної розвідки, засобами та методами власне теоретичної або прикладної механіки (електромеханіки) є або обмеженими, або вкрай складними, або неможливими взагалі.

На противагу, огляд апарату теоретичної електротехніки [2—4], її аналітичних і експериментальних можливостей дозволяє дійти висновку щодо її часткової, а в деяких випадках — і повної, переваги над засобами й методами теоретичної механіки (електромеханіки), що застосовуються для дослідження відповідних *динамічних* систем за схожих умов.

Однак огляд сучасного стану і аналітичного забезпечення вимірювальних перетворювачів моменту інерції [5—7] свідчить, що *на сьогодні узагальнена теорія електродинамічного моделювання вимірювального перетворення моменту інерції знаходиться тільки в початковій стадії свого розвитку*: не існує ані системи ієрархічно взаємозв'язаних і логічно сумісних положень, ні узагальнених електричних схем систем-аналогів вимірювальним перетворювачам моменту інерції, ні їх розробленого математичного забезпечення.

Причин цьому декілька і, на думку авторів, одна з найвагоміших — це відсутність системи узагальненого перетворювача моменту інерції (УПМІ), себто такого вимірювального пристрою, відносно якого всі інші нині відомі і можливі у майбутньому перетворювачі моменту інерції являтимуть собою окремо взяті випадки.

Однак в роботі [8] на загаль наукової спільноти була запропонована така абстрактна модель.

Серед іншого система УПМІ дозволяє за допомогою варіаційних принципів аналітичної механіки отримати математичну модель вимірювального перетворення та контролю моменту інерції, якій, цілком природно, притаманна ознака узагальненості.

Дана обставина докорінно змінює ситуацію і створює необхідні передумови щодо якісного роз-

вितку загальних теоретичних засад електродинамічного моделювання вимірювального перетворення моменту інерції механічних та електромеханічних систем з обертальною формою руху і обґрунтування їх практичної спроможності і самодостатності.

Отже наразі, *метою цієї статті* (другої із запланованих трьох) є побудова на основі системи УПМІ та її математичної моделі першої та другої електродинамічної моделі, розроблення їх структурних та електричних схем, отримання диференціальних рівнянь руху в формі рівнянь Лагранжа–Максвелла, а також дослідження питання адекватності цих моделей процесу перетворення моменту інерції та визначення області їх застосування.

1. Система узагальненого перетворювача моменту інерції

Узагальненим перетворювачем моменту інерції називається абстрактний вимірювальний пристрій довільного порядку (з n ступенями вільності), що реалізує вимірювальне перетворення моменту інерції в функціонально з ним пов'язану механічну фізичну величину — геометричну, кінематичну або динамічну, який є узагальненою формою відносно відомих та можливих у майбутньому перетворювачів моменту інерції і перетворюється в них за окремих умов.

Цей пристрій являє собою суто механічну або електромеханічну систему і складається з двох взаємодіючих частин (рис. 1 а і б):

— самого об'єкту вимірювання (контролю), який за природою є або механічною, або електромеханічною системою (назвемо цю частину підсистемою А);

— деякої додаткової суто механічної системи з наперед заданими властивостями та в'язями (підсистеми В), що певним наперед заданим чином зв'язана з об'єктом вимірювання і створює для нього або поле активних сил, спонукаючи до руху, або поле реакції в'язей, обмежуючи цей рух.

Як було показано в [8], математичною моделлю УПМІ є система диференціальних рівнянь,

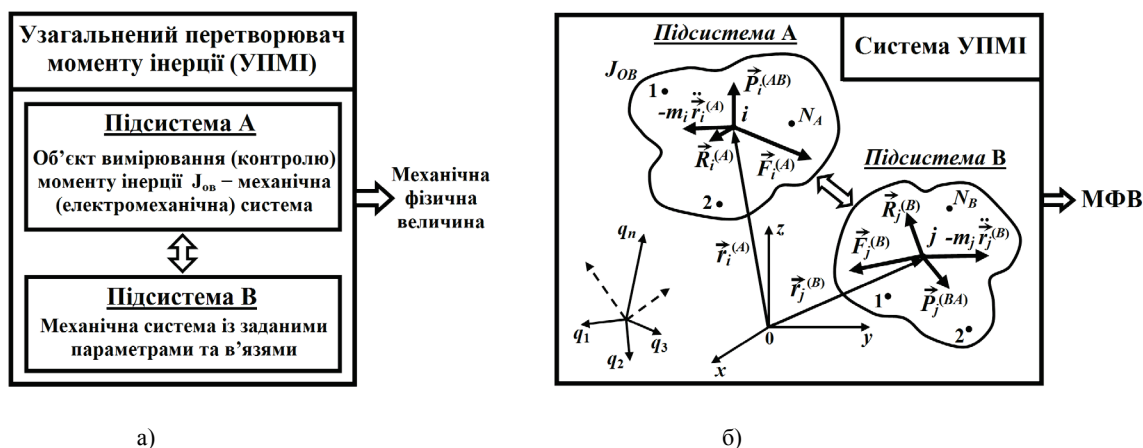


Рис. 1. Структурна та фізична схеми системи УПМІ

представлених у вигляді *рівнянь Лагранжа другого роду*

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} T_A (J_{OB}) \right] + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_B}{\partial \dot{q}_s} \right) - \left[\frac{\partial}{\partial q_s} T_A (J_{OB}) + \frac{\partial T_B}{\partial q_s} \right] = Q_s^{(A)} + Q_s^{(B)}, \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

які є узагальненою математичною моделлю будь-якого *теоретично можливого* перетворювача моменту інерції.

Проте, з огляду на особливості, що притаманні, як це впливає з [5—8], рухові будь-якого з відомих на сьогодні перетворювачів моменту інерції, систему диференціальних рівнянь (1) можна переписати таким чином:

$$\begin{cases} (J_{OB} + m_A l^2) \ddot{q}_1 = M_A^{(M)} + M_A^{(e)} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_1}; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T_B}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T_B}{\partial q_s} = Q_s - \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_s}, \quad s = 2, 3, \dots, n. \end{cases} \quad (2)$$

В системах (1) і (2) n — кількість ступенів вільності системи УПМІ, T_A і T_B — кінетичні енергії

відповідно підсистем А і В, $Q_s^{(A)}$ й $Q_s^{(B)}$ — узагальнені сили, що діють в них, Π — потенціальна енергія УПМІ, Φ — дисипативна функція Релея, M_A — головний момент сил підсистеми А відносно її осі обертання, q_s і \dot{q}_s — відповідно узагальнені координати та узагальнені швидкості.

Оскільки системі УПМІ та його математичній моделі (2) притаманною є узагальненість відносно відомих та можливих у майбутньому перетворювачів моменту інерції, то і електродинамічній моделі системи УПМІ також буде властива ознака узагальненості.

Враховуючи цю обставину, наразі з'являється можливість і постає задача розробки електродинамічної моделі саме системи УПМІ.

2. Перша електродинамічна модель УПМІ в рівняннях Лагранжа–Максвелла

Будь-який перетворювач моменту інерції, а отже і система УПМІ, може мати внаслідок дуальності дві принципово різні електродинамічні моделі, стан і рух кожної з яких описуватиметься своєю системою електродинамічних аналогій — першою або другою [1]. Тому і відповідні електродинамічні моделі системи УПМІ назвемо однойменно.

Скориставшись основними положеннями теорії динамічних аналогій [1, 9—11], рух *першої електродинамічної моделі* УПМІ можна описати за допомогою *рівнянь Лагранжа–Максвелла*. В першій системі електродинамічних аналогій ці рівняння набудуть вигляду *другого закону Кірхгофа* для електричних кіл.

Тоді на основі рівнянь руху УПМІ (2) для першої електродинамічної моделі можна записати

$$\begin{cases} (L_{OB} + L) \ddot{q}_1^{(e)} = e_1 - \frac{\partial W_e}{\partial q_1^{(e)}} - \frac{\partial \Phi_e}{\partial i_1}; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial W_M}{\partial i_s} = e_s - \frac{\partial W_e}{\partial q_s^{(e)}} - \frac{\partial \Phi_e}{\partial i_s}, \quad s = 2, 3, \dots, n, \end{cases} \quad (3)$$

де L_{OB} і L — індуктивності, які є аналогами для моментів інерції відповідно J_{OB} і $m_A l^2$, n — кількість незалежних контурів електродинамічної моделі, $W_M = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \sum_{p=1}^n L_{sp} i_s i_p$ і

$W_e = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \sum_{p=1}^n \frac{1}{C_{sp}} q_s^{(e)} q_p^{(e)}$ — відповідно енергії магнітного поля підсистеми В і електричного поля

електродинамічної моделі, $\Phi_e = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \sum_{p=1}^n R_{sp} i_s i_p$ — електрична дисипативна функція Релея, e_s —

контурні електрорушійні сили, $q_s^{(e)}$ — електричні заряди, що проходять незалежними контурами, починаючи з деякого моменту часу, їх похідні за часом $i_s = \dot{q}_s^{(e)}$ — контурні струми.

3. Структурна та узагальнена електрична схеми першої електродинамічної моделі УПМІ

Природно, структура електродинамічної моделі УПМІ має зберігати структуру самого УПМІ і складатися з двох взаємодіючих електричних підсистем А та В. Що ж стосується електричної схеми першої електродинамічної моделі УПМІ, то, як показує аналіз системи (3), електричне коло такої моделі має складатися з n незалежних контурів, в кожному з яких циркулюють контурні струми $i_s = \dot{q}_s^{(e)}$. При цьому n повинно збігатися з числом ступенів вільності самої системи УПМІ. До складу такого кола мають входити власні та спільні накопичувачі енергій магнітного та електричного полів (себто індуктивності та ємності), дисипативні елементи (активні опори), джерела е. р. с.

На рис. 2 наведено узагальнену електричну схему першої електродинамічної моделі УПМІ, електричний стан якої і описується системою диференціальних рівнянь (3).

Однак необхідно зауважити, що ця схема подана дещо в спрощеному вигляді — планарно, оскільки в загальному випадку взаємодія між електричними підсистемами А та В може здійснюватися не тільки через одну спільну гілку між контурами 1 та 2, а і між іншими контурами, відповідно, через кілька спільних гілок.

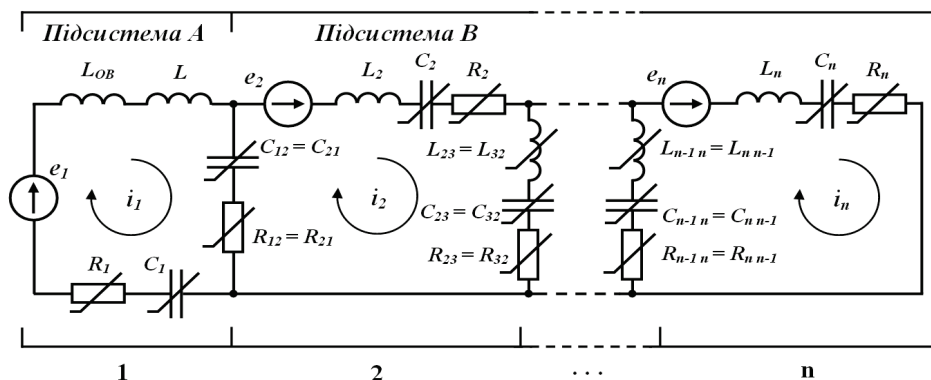


Рис. 2 Узагальнена схема першої електродинамічної моделі УПМІ

Це стосується і взаємодії між контурами власне в підсистемі В.

4. Друга електродинамічна модель УПМІ в рівняннях Лагранжа–Максвелла

В основу другої електродинамічної моделі УПМІ покладемо другу систему електродинамічних аналогій [1].

Тоді електричним аналогом математичної моделі УПМІ (2) буде система рівнянь Лагранжа–Максвелла, яка являтиме собою *перший закон Кірхгофа* для електричних кіл

$$\begin{cases} (C_{OB} + C) \ddot{\psi}_1 = J_1 - \frac{\partial W_M}{\partial \psi_1} - \frac{\partial \Phi_e}{\partial \varphi_1}; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial W_e}{\partial \varphi_s} = J_s - \frac{\partial W_M}{\partial \psi_s} - \frac{\partial \Phi_e}{\partial \varphi_s}, \quad s = 2, 3, \dots, n, \end{cases} \quad (4)$$

де C_{OB} і C — індуктивності, які є аналогами для моментів інерції відповідно J_{OB} і $m_A l^2$, n — кількість вузлів кола (окрім нульового), $W_e = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \sum_{p=1}^n C_{sp} \varphi_s \varphi_p$ — енергія електричного поля підсистеми В,

$W_M = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \sum_{p=1}^n \frac{1}{L_{sp}} \psi_s \psi_p$ — енергія магнітного поля електродинамічної моделі,

$\Phi_e = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \sum_{p=1}^n \frac{1}{R_{sp}} \varphi_s \varphi_p$ — електрична дисипативна функція Релея, J_s — вузлові струми від джерел струму,

$\psi_s = \int_0^t \varphi_s dt$ — інтеграли від вузлових потенціалів відносно часу, починаючи з деякого моменту, або магнітні потокозчеплення, φ_s — вузлові потенціали.

5. Структурна та узагальнена електрична схеми другої електродинамічної моделі УПМІ

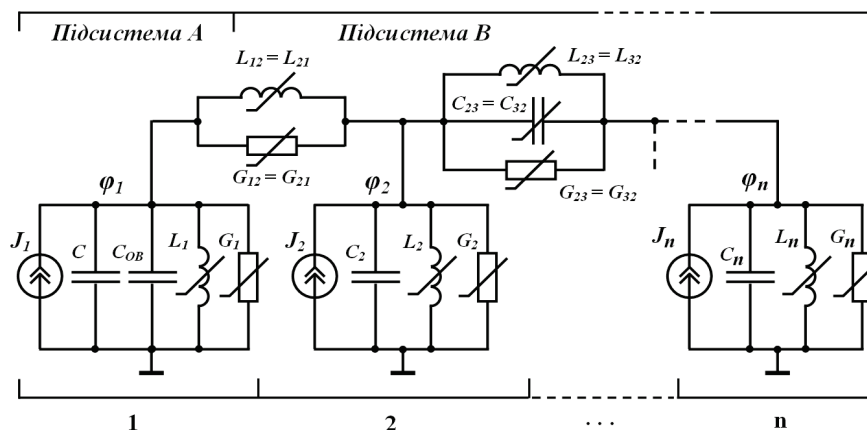


Рис. 3 Узагальнена схема другої електродинамічної моделі УПМІ

Як і в попередньому випадку, структура другої електродинамічної моделі УПМІ має зберігати структуру самого УПМІ і складатися з двох взаємодійних електричних підсистем А та В (рис. 3).

Електрична ж схема другої електродинамічної моделі УПМІ має бути дуальною відносно першої і являти собою електричне коло, що містить $n + 1$ вузлів (див. рис. 3), електричний потенціал одного з яких (наприклад, останнього) дорівнює нулю.

В склад такого кола мають входити власні та спільні накопичувачі енергій електричного та магнітного полів, дисипативні елементи та джерела електричної енергії. Останні мають бути джерелами струму.

В цьому електричному колі, що побудоване в другій системі електродинамічних аналогій також враховані всі особливості, притаманні рухові системи УПМІ.

Взаємодія між електричним підсистемами А та В в загальному випадку здійснюється через всі спільні гілки між вузлами, однак на схемі (рис. 3) для спрощення наведено тільки один зв'язок (між вузлами 1 та 2).

6. До питання адекватності моделей та області їх застосування

Звичайно, питання точності (адекватності) відображення запропонованими математичною і електродинамічними моделями процесу перетворення моменту інерції потребує додаткового і ґрунтовного дослідження, в першу чергу — експериментального, однак наразі теоретичну частину цієї задачі в основі розв'язано.

Так, математичні моделі (1) і (2) розроблено, спираючись на *варіаційні принципи аналітичної механіки*, зокрема *принципи Даламбера* та *Даламбера–Лагранжа*, і в роботі [8] ці моделі отримали строге математичне обґрунтування. Це означає, що як і система УПМІ, так і її математичні моделі будуть настільки адекватними, наскільки адекватними є варіаційні принципи механіки та фундаментальні закони фізики, на яких ті побудовано. У зв'язку з цим запропоновані математичні моделі (1) і (2) зі змінним значенням числа ступенів вільності системи n через свою узагальненість можуть бути зведеними до вже перевічених (в тому числі і експериментально) математичних моделей існуючих на сьогодні перетворювачів моменту інерції із заданим числом ступенів вільності (наприклад, $n = 1$) [5].

Що ж стосується першої (3) і другої (4) електродинамічних моделей, то їх, як це було показано вище, отримано з математичної моделі (2) на підставі *теорії динамічних аналогій*, тому їх точність відображення процесу перетворення моменту інерції цілком ґрунтується на адекватності математичної моделі системи УПМІ. Однак, як показує порівняльний аналіз, з одного боку, системи рівнянь Лагранжа другого роду (2), а з іншого — системи рівнянь Лагранжа–Максвелла (3) і (4), між ними існують розбіжності.

Так, наприклад, в системі рівнянь (3) враховано, що електромагнітні коефіцієнти індукції залежать виключно від узагальнених швидкостей (контурних струмів) і не залежать від узагальнених координат (інакше енергія магнітного поля електричної системи за умови сталості її контурних струмів безперервно зростала б, що не відповідає дійсності), тому складова $\frac{\partial W_M}{\partial q_s^{(e)}} = 0$ і в першій електродинамічній моделі (3) відсутня, чого не можна сказати про її аналог $\frac{\partial T_B}{\partial q_s}$

моделі (2). Те ж саме стосується і складової $\frac{\partial W_e}{\partial \psi_s} = 0$ для другої електродинамічної моделі.

Ця обставина вимагає додаткового аналітичного дослідження, оскільки є ознакою глибинного теоретичного *розходження* в динаміці еволюцій механічних (електромеханічних) і електричних систем і, отже, накладає обмеження на відповідні електродинамічні аналогії. Тому, зважаючи на це, щоб уникнути означених обмежень, надалі будемо вести мову лише про такі перетворювачі моменту інерції, кінетична енергія яких є квадратичною формою від узагальнених швидкостей і не залежить від узагальнених координат. Відомі на сьогодні перетворювачі моменту інерції ці умови задовольняють.

І останнє. Оскільки математична модель процесу перетворення моменту інерції отримана за допомогою варіаційних принципів аналітичної механіки і представлена в узагальнених координатах в формі рівнянь Лагранжа другого роду, а електродинамічні моделі — рівняннями Лагранжа–Максвелла, то дія цих моделей поширюється не тільки на лінійні, але і на нелінійні та параметричні системи перетворювачів моменту інерції.

7. Про термінологію

Аналізуючи математичну модель системи УПМІ (2), неважко довести **теорему**: *будь-яке перетворення моменту інерції вимагає перехідного процесу для об'єкту вимірювання (контролю) і можливе тільки за цієї умови*. Ця обставина спонукає до необхідності заміни загальноприйнятого терміну «електрична модель» на точніший — «електродинамічна модель», оскільки динамічний режим вимірювального перетворення моменту інерції поширюється і на його моделі.

Висновки

В роботі отримала подальший розвиток теорія *електродинамічного моделювання* вимірювального перетворення моменту інерції механічних та електромеханічних систем з обертальною формою руху, а саме:

— введено систему узагальненого перетворювача моменту інерції (УПМІ) та представлено її математичну модель;

— на їх основі за допомогою теорії динамічних аналогій побудовані перша та друга електродинамічні моделі системи УПМІ і отримані диференціальні рівняння руху в формі рівнянь Лагранжа–Максвелла;

— розроблені структурні та узагальнені електричні схеми цих моделей;

— досліджене питання адекватності наведених моделей процесу перетворення моменту інерції та визначена область їх застосування.

Все це дозволяє проводити теоретичні й експериментальні дослідження систем перетворювачів моменту інерції (як існуючих, так і можливих!), їх методів перетворення, застосовуючи для цього аналітичні та експериментальні можливості теоретичної електротехніки.

І наостанок. На думку авторів, вищенаведені теоретичні ідеї можуть бути застосовані також і для електродинамічного моделювання *інших* механічних та електромеханічних систем з обертальною формою руху зі схожою з системою УПМІ внутрішньою структурою.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ведміцький Ю. Г. Елементи теорії електродинамічного моделювання вимірювального перетворення і контролю моменту інерції. Проблематика, динамічні аналогії та принцип дуальності / Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2008. — № 5(80). — С. 25—30.
2. Перхач В. С. Теоретична електротехніка : підруч. / В. С. Перхач. — К. : Вища школа, 1992. — 439 с. — ISBN 5-11-003873-2.
3. Карпов Ю. О. Теоретичні основи електротехніки. Перехідні процеси в лінійних електричних колах / Ю. О. Карпов, Т. Є. Магас, Ю. Г. Ведміцький. — Вінниця : УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2004. — 159 с. — ISBN 966-641-077-X.
4. Карпов Ю. О. Теоретичні основи електротехніки. Електромагнітне поле: підруч. / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук. — Вінниця : УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2008. — 407 с. — ISBN 978-966-641-236-5.
5. Кухарчук В. В. Елементи теорії контролю динамічних параметрів електричних машин : моногр. / В. В. Кухарчук. — Вінниця : УНІВЕРСУМ–Вінниця, 1998. — 125 с. — ISBN 966-7199-29-0.
6. Гернет М. М. Определение моментов инерции / М. М. Гернет, В. Ф. Ратобильский. — Москва : Машиностроение, 1969. — 248 с.
7. Ведміцький Ю. Г. До питання розв'язку проблеми систематизації математичних моделей і методів перетворення моменту інерції. Огляд та перспектива / Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету. — 2006. — № 3/2006(38), Ч. 1. — С. 130—133.
8. Ведміцький Ю. Г. Узагальнений перетворювач моменту інерції / Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету ім. М. Остроградського. — 2008. — № 3/2008(50), Ч. 1. — С. 113—118.
9. Павловський М. А. Теоретична механіка : підруч. / М. А. Павловський. — 2-ге вид., стер. — К. : Техніка, 2004. — 512 с. — ISBN 966-575-002-X.
10. Olson H. F. Dynamical Analogies / H. F. Olson. — New York : D. Van Nostrand company, 1943. — 197 с.
11. Фурдудев В. В. Электроакустика / В. В. Фурдудев. — М.–Л. : Гос. изд-во техн. лит-ры, 1948. — 515 с.

Рекомендована кафедрою теоретичної електротехніки та електричних вимірювань

Надійшла до редакції 9.06.09
Рекомендована до друку 18.06.09

Ведміцький Юрій Григорович — асистент, **Кухарчук Василь Васильович** — завідувач кафедри.

Кафедра теоретичної електротехніки та електричних вимірювань, Вінницький національний технічний університет