УДК 512.53

А. А. Барковська;
В. Д. Дереч, канд. фіз.-м. наук, доц.

ПРО ІЗОТОННІ БІЄКТИВНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ НАПІВРЕШІТКИ

Знайдено необхідні і достатні умови, за яких ізотонне бієктивне перетворення напіврешітки є автоморфізмом.

Вступ

Одним з основних бінарних відношень, які вивчаються в математиці є відношення порядку (або часткового порядку). Звичайний порядок на будь-якій числовій множині, відношення включення між множинами довільної природи є важливими прикладами цього відношення. В сучасній математиці є цілі галузі (наприклад — теорія решіток і теорія напіврешіток), в яких вивчають певного типу впорядкованих множин. Зазначимо, що теорія решіток [1, 2] так чи інакше використовується в усіх розділах сучасної математики. В цій роботі вивчаються ізотонні бієкції напіврешітки. Зокрема (і це є основним результатом статті) знаходимо необхідні і достатні умови для того щоб ізотонна біекція напіврешітки була автоморфізмом.

Термінологія і основні означення

Бінарне відношення ω на множині A називається порядком, якщо воно:

1) рефлексивне, тобто для будь-якого $x \in A$ $\langle x,x \rangle \in \omega$;

2) транзитивне, тобто з умови $\langle x,y \rangle \in \omega$ і $\langle y,z \rangle \in \omega$ випливає $\langle x,z \rangle \in \omega$;

3) антисиметричне, тобто з умови $\langle x,y \rangle \in \omega$ і $\langle y,x \rangle \in \omega$ випливає $x = y$.

Множина називається впорядкованою, якщо на ній визначено відношення порядку.

Зауваження: Частіше за все порядок на впорядкованій множині традиційно позначається через $\leq$, хоча далеко не завжди мова йде про звичайний порядок на числових множинах.

Якщо $x \not\leq y$ і $y \not\leq x$, то цей факт позначають $x \parallel y$.

Далі, напівгрупа S називається напіврешіткою, якщо вона комутативна (тобто для будь-яких $x,y \in S$ має місце тотожність $xy = yx$) і кожний її елемент є ідемпотентом (тобто для будь-якого $x \in S$ виконується рівність $x^2 = x$). Використовуючи бінарну операцію, на напіврешітці S можна визначити стабільний порядок. А саме: нехай за означенням $x \leq y$ тоді і лише тоді, коли $xy = x$. Легко перевірити, що бінарне відношення $\leq$ є стабільним порядком на множині S. Слід також зазначити, що для будь-яких $x,y \in S$ $xy = \inf\{x,y\}$ (де $\inf\{x,y\}$ стандартне позначення точної нижньої межі множини $\{x,y\}$). Крім того, щойно визначений порядок на напіврешітці S є стабільним, тобто, з умови $x \leq y$ випливає $xz \leq yz$ для будь-якого $z \in S$.

Далі, якщо f — функція, то через $dom(f)$ і $im(f)$ позначаємо відповідно область визначення і множину значень функції f. Функцію $f : A \to B$ називають сюр'єкцією, якщо $dom(f) = A$ і для будь-якого $b \in B$ існує елемент $a \in A$ такий, що $f(a) = b$. Функцію f називають ін'єкцією, якщо для будь-яких $x,y \in dom(f)$ виконується імплікація: $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. Якщо функція є одночасно ін'єкцією і сюр'єкцією, то вона називається біекцією.

Нехай тепер $(A;\leq)$ і $(B;\leq^*)$ дві впорядковані множини. Функцію $f : A \to B$ називають ізотонною (або монотонною), якщо з умови $x \leq y$ випливає $f(x) \leq^* f(y)$.

Бієктивне перетворення f напіврешітки S називають автоморфізмом, якщо для будь-яких

$x, y \in S$ має місце тотожність $f(xy) = f(x)f(y)$. Групу всіх автоморфізмі напіврешітки S стандартно позначають через $Aut(S)$.

Всі інші необхідні поняття з теорії напівгруп і теорії напіврешіток можна знайти в [1] і [2].

Ізотонна бієкція нескінченної напіврешітки

Спочатку наведемо один (відомий) актуальний для нас приклад. Нехай $A = \{a_0, a_1, a_2\}$ і $B = \{b_0, b_1, b_2\}$ дві триелементні множини. На цих множинах визначимо порядок. Порядок на множині A визначається так: $a_0 < a_1$, $a_0 < a_2$ і $a_1 \parallel a_2$. На множині B визначимо лінійний порядок. А саме: $b_0 < b_1 < b_2$. Легко перевірити, що відносно визначених порядків A і B стають напіврешітками. Визначимо бієкцію $f : A \to B$ так: $f(a_0) = b_0$, $f(a_1) = b_2$, $f(a_2) = b_1$. Легко перевірити, що функція f є ізотонною бієкцією. Але обернена функція $f^{-1} : B \to A$ не буде ізотонною. Дійсно, $b_1 < b_2$ але ж $f^{-1}(b_1) = a_1$, $f^{-1}(b_2) = a_2$, отже, $f^{-1}(b_1) \parallel f^{-1}(b_2)$.

Нехай тепер S — довільна напіврешітки, f — ізотонне перетворення напіврешітки S. Природним чином виникають два питання:

Чи буде f^{-1} ізотонним перетворенням напіврешітки S?

Чи буде f^{-1} автоморфізмом напіврешітки S?

Як з'ясовано в цій статті відповіді на обидва ці питання суттєво залежать від того скінченна чи нескінченна напіврешітка S. Для нескінченної напіврешітки (взагалі кажучи) відповідь негативна (і це в подальшому ми покажемо на прикладі). Для скінченного ж випадку відповідь позитивна (див. формулювання теореми).

Отже, наведемо приклад нескінченної напіврешітки, на якій можна задати ізотонну бієкцію f таку, що f^{-1} не буде ані ізотонним перетворенням ані автоморфізмом напіврешітки.

Нехай $S = \{0\} \cup \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} \cup \{b_3, b_6, b_9, \ldots, b_{3n}, \ldots\}$, де $n \in N$.

Причому $\{0\} \notin \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} \cup \{b_3, b_6, b_9, \ldots, b_{3n}, \ldots\}$ і $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} \cap \cap \{b_3, b_6, b_9, \ldots, b_{3n}, \ldots\} = \varnothing$. Визначимо бінарну операцію на множині S таким чином:

1. Для будь-якого $x \in S$ $x^2 = x$ і $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$;
2. $a_i \cdot a_j = a_j \cdot a_i = 0$, якщо $i \neq j$;
3. $b_{3i} \cdot b_{3j} = b_{3j} \cdot b_{3i} = 0$, якщо $i \neq j$;
4. $a_{3n} \cdot b_{3n} = b_{3n} \cdot a_{3n} = a_{3n}$ для будь-якого $n \in N$;
5. $a_j \cdot b_{3n} = b_{3n} \cdot a_j = 0, a_{3n}$, якщо $j \neq 3n$.

Проста рутинна перевірка показує — щойно введена операція має властивості асоціативності, комутативності і ідемпотентності. Тобто множина S відносно цієї операції є напіврешіткою.

Визначимо перетворення f на напіврешітці S таким чином:
$f(0) = 0$; $f(a_1) = a_3$, $f(a_2) = b_3$; $f(a_{3n}) = a_{3n+3}$; $f(b_{3n}) = b_{3n+3}$. Якщо $k \geq 4$ і $k \neq 3m$, то $f(a_k) = a_{k-3}$. Легко перевірити, що перетворення f є бієктивним. Покажемо тепер, що бієкція f є ізотонною. Якщо $0 < x$, то $f(0) = 0 < f(x)$. Якщо ж $a_{3n} < b_{3n}$, то $f(a_{3n}) = a_{3n+3} < b_{3n+3} = f(b_{3n})$. Отже, бієкція f є ізотонною. Тепер розглянемо бієкцію f^{-1} (тут через f^{-1} ми позначаємо функцію обернену до f). Покажемо, що вона не є ізотонною і, отже, не є автоморфізмом напіврешітки S. Дійсно, $a_3 < b_3$, але $f^{-1}(a_3) \parallel f^{-1}(b_3)$, оскільки $f^{-1}(a_3) = a_1$ і $f^{-1}(b_3) = a_2$. Таким чином, ми сконструювали напіврешітку і задали на ній ізотонну бієкцію f таку, що f^{-1} не є ізотонною. Зазначимо, що при цьому ми суттєво скористалися нескінченністю напіврешітки. Ситуація кардинально міняється, якщо розглядати скінченні напіврешітки.

Ізотонна бієкція на скінченній напіврешітці

Основним результатом статті є теорема.

Теорема. *Для бієктивного перетворення f скінченної напіврешітки S такі умови еквівалентні:*

1. f — ізотонне перетворення;

2. f^{-1} — ізотонне перетворення;

3. $f \in Aut(S)$;

4. для будь-якого ідеалу A напіврешітки S $f(A)$ теж є ідеалом.

Доведення. Спочатку обґрунтуємо імплікацію $1 \Rightarrow 2$. Припустимо протилежне, тобто бієкція f^{-1} не є ізотонною. Тоді знайдеться пара $a < b$ така, що $f^{-1}(a) > f^{-1}(b)$ або $f^{-1}(a) \parallel f^{-1}(b)$. Припустимо, що $f^{-1}(a) > f^{-1}(b)$, тоді існують елементи x і y такі, що $f(x) = a$ і $f(y) = b$. Тоді $x = f^{-1}(f(x)) \gg f^{-1}(f(y)) = y > f^{-1}(f(y)) = y$, тобто $x > y$. Оскільки $a < b$, то $f(x) < f(y)$. А це суперечить ізотонності бієкції f. Тепер припустимо, що $f^{-1}(a) \parallel f^{-1}(b)$. Отже, маємо $x \parallel y$ і $f(x) < f(y)$.

Розглянемо можливі випадки.

1-й випадок. $f(x) = x$.

Оскільки за умови напіврешітка S є скінченною, то послідовність $f(y)$, $f^2(y), \ldots, f^n(y), \ldots$ теж є скінченною. Це означає, що існують відмінні між собою натуральні числа m і k (нехай для конкретності $m > k$) такі, що $f^m(y) = f^k(y)$, тоді $f^{m-k}(y) = y$. Отже, $x < f(y)$, то $f^{m-k}(x) < f^{m-k}(y)$. Звідси $x < y$. Суперечність.

2-й випадок. $f(y) = y$.

Аналогічно попередньому випадку дійдемо до суперечності.

*3 –й випадок.*_$f(x) \neq x$ і $f(y) \neq y$.

Оскільки послідовності $f(y), f^2(y), \ldots, f^n(y), \ldots$ і $f(x), f^2(x), \ldots,$ $f^n(x), \ldots$ є скінченними, то знайдуться натуральні числа t $_i$ m такі, що $f^t(y) = y$ і $f^m(x) = x$. Тоді $y = f^{tm}(y) = f^{tm}(x) = x$. Суперечність. Імплікацію $1 \Rightarrow 2$ доведено.

Імплікація $2 \Rightarrow 1$ доводиться аналогічно. Таким чином, $1 \Leftrightarrow 2$.

Доведемо тепер імплікацію $1 \Rightarrow 3$.

Оскільки $xy \leq x$ і $xy \leq y$, то $f(xy) \leq f(x)$ і $f(xy) \leq f(y)$. З двох останніх нерівностей випливає нерівність

$$f(xy) \leq f(x)f(y). \tag{1}$$

Оскільки бієкція f^{-1} є ізотонною, то з (1) випливає

$$xy \leq f^{-1}(f(x)f(y)). \tag{2}$$

Далі, $f(x)f(y) \leq f(x)$ і $f(x)f(y) \leq f(y)$. Звідки $f^{-1}(f(x)f(y)) \leq x$ і $f^{-1}(f(x)f(y)) \leq y$. З останніх двох нерівностей випливає:

$$f^{-1}(f(x)f(y)) \leq xy. \tag{3}$$

З (2) і (3) маємо $f^{-1}(f(x)f(y)) = xy$. Звідки $f(xy) = f(x)f(y)$. Тобто $f \in Aut(S)$.

Тепер обґрунтуємо імплікацію $3 \Rightarrow 1$. Нехай $f \in Aut(S)$. Якщо $x \leq y$, то $xy = x$. З останньої рівності отримаємо $f(x)f(y) = f(xy) = f(x)$. Отже, $f(x) \leq f(y)$. Тобто f — ізотонна бієкція. Таким чином, ми показали попарну еквівалентність умов 1, 2, 3.

Обґрунтуємо тепер імплікацію $4 \Rightarrow 1$.

Позначимо через $I(S)$ решітку ідеалів напіврешітки S. Добре відомо, що для будь-яких $A, B \in I(S)$ $\sup\{A, B\} = A \cup B$ і $\inf\{A, B\} = A \cap B.$ Бієкція f визначає на решітці $I(S)$ автоморфізм. А саме — для будь якого $A \in I(S)$ встановлюємо відповідність: $A \mapsto f(A)$. Легко перевірити, що при автоморфізмі решітки образом нерозкладного в об'єднання елемента є нерозкладний в об'єднання елемент. Відомо, що в решітці $I(S)$ нерозкладними в об'єднання є в точності головні ідеали, тобто ідеали виду cS. Отже, для будь-якого $x \in S$ існує елемент $a \in S$ такий, що $f(xS) = aS.$ Іншими словами образом головного ідеалу є головний ідеал. Покажемо, що $f(x) = a$. Припустимо протилежне, тобто $f(x) < a.$ Позначимо $f(x)$ через b. Отже, за припущенням

$$b < a. \tag{4}$$

Далі, існує елемент $y \in xS$ такий, що $f(y) = a.$ Оскільки $y \leq x,$ то $yS \subseteq xS.$ Звідки $f(yS) \subseteq f(xS).$ Нехай $f(yS) = cS.$ Тоді

$$cS \subseteq aS. \tag{5}$$

Далі, $a = f(y) \in cS.$ Звідси $a \leq c,$ тому

$$aS \subseteq cS. \tag{6}$$

З (5) і (6) випливає, що $aS = cS.$ Звідси $a = c.$ Отже, $f(xS) = aS = cS = f(yS).$ З останньої рівності випливає $xS = yS$. Звідки $x = y$. Далі, $a = f(y) = f(x) = b.$ З другого боку (див нерівність (4)) $b < a$. Суперечність. Таким чином, для будь-якого $x \in S$ має місце рівність $f(xS) = f(x)S.$ тепер ми готові довести ізотонність бієкції f. Нехай $x < y$, тоді $xS \subset yS.$ Звідси $f(xS) \subset f(yS)$ або $f(x)S \subset f(y)S.$ З останнього включення отримаємо $f(x) < f(y).$

Нарешті обґрунтуємо імплікацію $3 \Rightarrow 4$.

Нехай $f \in Aut(S)$ і A — ідеал напіврешітки S. Покажемо, що $f(A)$ теж є ідеалом. Для довільного елемента $b \in S$ існує елемент $c \in S$ такий, що $f(c) = b.$ Для кожного елемента $a \in S$ маємо: $f(a)b = f(a)f(c) = f(ac) \in f(A).$

Отже, $f(A)S \subseteq f(A).$ Аналогічно доводиться, що $Sf(A) \subseteq f(A).$ Таким чином, $f(A)$ — ідеал напіврешітки S.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гретцер Георг. Общая теория решеток : пер. з англ. / Георг Гретцер. — М. : Мир, 1982. — 452 с.

2. Клиффорд Альфред. Алгебраическая теория полугрупп : пер. з англ. / А. Клиффорд, Г. Престон. — М. : Мир, 1972. — 286 с.

Рекомендована кафедрою вищої математики

Надійшла до редакції 15.09.09
Рекомендована до друку 24.09.09

Барковська Алла Андріївна — старший викладач, ***Дереч Володимир Дмитрович*** — доцент.

Кафедра вищої математики, Вінницький національний технічний університет