УДК 517.95,97

В. О. Капустян, д-р фіз.-мат. наук, проф.;
О. П. Когут

ПРО ДОПУСТИМІ ЗБУРЕННЯ ОБЛАСТІ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ В КОЕФІЦІЄНТАХ НЕЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ ЗАДАЧ ДІРІХЛЕ

Розглянуто питання Моско-стійкості відносно збурень вихідної області задачі оптимального обмеженого узагальнено соленоїдального керування в коефіцієнтах нелінійної еліптичної задачі Діріхле. Показано, що дана задача є Моско-стікою відносно двох незалежних типів збурень області.

Вступ

Обов'язковою і вагомою складовою математичної моделі довільної задачі оптимального керування системою з розподіленими параметрами виступає область Ω, на якій вивчається об'єкт керування. Отже, якщо область Ω змінюється, то змінюється і вихідна математична модель. Звідси виникає природне питання — наскільки чутливою, або стійкою є розглянута модель до змін області. Питання про стійкість задач оптимального керування відносно геометричних збурень області є актуальним на сьогодні, оскільки наявність цієї властивості дозволяє отримувати наближені розв'язки задач оптимального керування в областях складної геометричної структури за допомою розв'язків задач у простіших областях.

У роботі розглянуто клас задач оптимального керування коефіцієнтами нелінійного еліптичного рівняння з умовами Діріхле на межі області, у випадку коли керування належать множині узагальнено-соленоїдальних матриць. В роботах G. Dal Maso, F. Murat [1], G. Buttazzo, B. Bucur [2] показано, що типовою ситуацією для таких задач є наявність властивості «нестійкості» відносно збурень області.

В звязку з цим, ставиться за мету для виділенного класу задач довести стійкість відносно двох незалежних типів збурень вихідної області, залучаючи концепцію Моско-стійкості (див. роботи [3, 4]).

Постановка задачі

Нехай Ω є непорожньою відкритою підмножиною обмеженої однозв'язної множини $D \subset \mathbb{R}^n$ з регулярною межею.

Розглянемо проблему мінімізації розбіжності між заданим розподіленням $z_\partial \in L_p(D)$ та розв'язком нелінійної задачі Діріхле, вибираючи в якості керувань матрицю коефіцієнтів $\mathcal{U} \in L_\infty^{n\times n}(D)$ головної частини еліптичного оператора. А саме, задача оптимального керування полягає в такому: знайти

$$L_\Omega = \int_\Omega |\, y(x) - z_\partial(x) \,|^p \, dx \to \inf \tag{1}$$

при обмеженнях

$$\mathcal{U} \in U_{sol};\ y \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega); \tag{2}$$

$$-\mathrm{div}\Big(\mathcal{U}(x)\Big[(\nabla y)^{p-2}\Big]\nabla y\Big) + a_0(x)\,|\, y \,|^{p-2}\ y = f \text{ в } \Omega, \tag{3}$$

де $L_\infty(D) \ni a_0(x) \ge 0$, а через U_{sol} позначено клас симетричних узагальнено соленоїдальних матриць $\mathcal{U} = \{a_{ij}(x)\}_{1\le i,\, j\le n}$ таких, що:

$$\left\{\begin{array}{l} |\, a_{ij}(x)\,| \le \xi_2(x) \ \text{м.с. на } D \ \forall i,j \in \{1,\dots,n\}; \\ \left(\mathcal{U}(x)\left(\left[\zeta^{p-2}\right]\zeta - \left[\eta^{p-2}\right]\eta\right), \zeta-\eta\right)_{\mathbb{R}^n} \ge 0 \ \text{м.с. на } D \ \forall \zeta,\eta \in \mathbb{R}^n; \\ \left(\mathcal{U}(x)\left[\zeta^{p-2}\right]\zeta, \zeta\right)_{\mathbb{R}^n} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,|\,\zeta_j\,|^{p-2}\zeta_j\zeta_i \ge \xi_1(x)|\,\zeta\,|_p^p \ \text{м.с. на } D \end{array}\right\} \cap V. \tag{4}$$

Тут ξ_1, ξ_2 — задані функції з простору $L_\infty(D)$ такі, що

$$0 < \beta \le \xi_1(x) \le \xi_2(x) \quad \text{м.с. на } \Omega; \tag{5}$$

$p \in (1,+\infty)$ — задана величина; $|\,\eta\,|_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k^p\right)^{1/p}$;

$$\left[\eta^{p-2}\right] = \operatorname{diag}\left\{|\,\eta_1\,|^{p-2}, |\,\eta_2\,|^{p-2}, \dots, |\,\eta_n\,|^{p-2}\right\} \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n,$$

а множина $V = \left\{\mathcal{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n] \,\middle|\, \operatorname{div}\mathbf{u}_i \in Q_i,\ \forall i = 1,\dots,n\right\}$, де $\{Q_1,\dots,Q_n\}$ — компактні множини в просторі $W_q^{-1}(D)$. Множиною допустимих розв'язків Ξ_Ω^{sol} задачі (1)—(3) будемо називати сукупність пар $(\mathcal{U}, y) \in L_\infty^{n\times n}(D) \times \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$, які пов'язані співвідношеннями (2), (3). Через τ будемо позначати добуток $*$-слабкої топології в $L_\infty^{n\times n}(D)$ і слабкої топології в просторі $\overset{\circ}{W}{}_p^1(D)$.

Виходячи з (4), (5) крайова задача (2), (3) є однозначно розв'язною [5]. Тоді є розв'язною і задача (1)—(3) у класі узагальнено-соленоїдальних керувань [5].

У цій роботі ставиться за мету дослідити залежність допустимих (і оптимальних) розв'язків $(\mathcal{U}_\varepsilon, y_\varepsilon)$ задач оптимального керування

$$L_{\Omega_\varepsilon}(\mathcal{U}_\varepsilon, y_\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} |\, y_\varepsilon(x) - z_\partial(x)\,|^p\, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |\,\nabla y_\varepsilon(x)\,|^p\, dx \to \inf; \tag{6}$$

$$-\operatorname{div}\left(\mathcal{U}_\varepsilon(x)\left[(\nabla y_\varepsilon)^{p-2}\right]\nabla y_\varepsilon\right) + a_0\,|\, y_\varepsilon\,|^{p-2}\, y_\varepsilon = f \ \text{ в } \Omega_\varepsilon; \tag{7}$$

$$y_\varepsilon \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega_\varepsilon),\ \mathcal{U}_\varepsilon \in U_{sol} \tag{8}$$

від збурення $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ фіксованої області $\Omega \subseteq D$. Далі ε означатиме малий параметр, що змінюється в межах строго спадної послідовності додатних чисел, які прямують до нуля. Будемо припускати, що множина допустимих керувань U_{sol} і, відповідно, множина допустимих розв'язків $\Xi_{\Omega_\varepsilon}^{sol} \subset L_\infty^{n\times n}(D) \times \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega_\varepsilon)$ непорожні для кожного $\varepsilon > 0$.

Допустимі збурення області

В цьому розділі, за аналогією з [3, 4], введемо два типи збурень області.

***Означення* 1.** [6] Будемо говорити, що послідовність $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subseteq D$ відкритих підмножин збігається до відкритої множини $\Omega \subseteq D$ в H^c-топології, якщо $d_{H^c}(\Omega_\varepsilon, \Omega)$ збігається до 0 при $\varepsilon \to 0$, де позначено $d_{H^c}(\Omega_1, \Omega_2) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}\left|d\left(x, \Omega_1^c\right) - d\left(x, \Omega_2^c\right)\right|$. Тут Ω_i^c є доповненням множин Ω_i в $\mathbb{R}^n$.

***Означення* 2.** [7] Послідовність $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subseteq D$ відкритих підмножин множини топологічно збігається до відкритої множини $\Omega \subseteq D$ (в позначеннях $\Omega_\varepsilon \xrightarrow{\text{top}} \Omega$), якщо існують компактна множина $K_0 \subset \Omega$ нульової p-ємності та компактна множина $K_1 \subset \mathbb{R}^n$ лебегової міри нуль, для яких справедливо:

1. Якщо $\Omega^{'} \subset\subset \Omega \setminus K_0$, то $\Omega^{'} \subset\subset \Omega_\varepsilon$ для ε достатньо малих;

2. Для довільної відкритої множини U такої, що $\overline{\Omega} \cup K_1 \subset U$, виконується умова: $\Omega_\varepsilon \subset U$ для достатньо малих ε. (Означення та властивості p-ємності див. в [8]).

В загальному випадку, відображення $\Omega \mapsto y_\Omega$, яке з кожною множиною Ω пов'язує відповідний їй розв'язок y_Ω задачі Діріхле (2), (3), не є неперервним відносно H^c-збіжності множин. В зв'язку з цим, визначаючи допустимі збурення, залучимо додаткове припущення, як це зроблено в роботах [3, 4].

***Означення* 3.** Нехай Ω та $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ — відкриті підножини множини D. Будемо казати, що послідовність $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ утворює H^c-допустиме збурення множини Ω, якщо:

1. $\Omega_\varepsilon \xrightarrow{H^c} \Omega$ при $\varepsilon \to 0$;

2. $\Omega_\varepsilon \in \mathcal{W}_w(D)$ для всіх $\varepsilon > 0$, де клас $\mathcal{W}_w(D)$ визначено в роботі [9] (див. також роботу [3]).

***Означення* 4**. Нехай Ω та $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ — відкриті підмножини множини D. Будемо казати, що послідовність $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ утворює топологічно допустиме збурення множини Ω (або t-допустиме), якщо $\Omega_\varepsilon \xrightarrow{\text{top}} \Omega$ в сенсі означення 2.

Моско-стійкість задач оптимального керування. Почнемо з такого поняття.

***Означення* 5.** [3] Послідовність $\left\{ \Xi^{sol}_{\Omega_\varepsilon} \right\}_{\varepsilon>0} \frac{1}{2}$ збігається до Ξ^{sol}_{Ω} в сенсі Моско, якщо:

1. Для кожної пари $(\mathcal{U},\, y) \in \Xi^{sol}_{\Omega}$ існує послідовність $\left\{ (\mathcal{U}_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \Xi^{sol}_{\Omega_\varepsilon} \right\}_{\varepsilon>0}$, така що $\mathcal{U}_\varepsilon \to \mathcal{U}$ сильно в $L^{n\times n}_\infty(D)$ і $\tilde{y}_\varepsilon \to \tilde{y}$ сильно в $\overset{\circ}{W}{}^1_p(D)$;

2. Якщо $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — послідовність чисел, яка прямує до 0, а $\{(\mathcal{U}_k, y_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ — послідовність така, що $(\mathcal{U}_k, y_k) \in \Xi^{sol}_{\Omega_{\varepsilon_k}}$ $\quad \forall k \in \mathbb{N}$, і $(\mathcal{U}_k, \tilde{y}_k) \xrightarrow{\tau} (\mathcal{U}, \psi)$ в $L^{n\times n}_\infty(D) \times \overset{\circ}{W}{}^1_p(D)$, то існує функція $y \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, така що $y = \psi|_\Omega$ і $(\mathcal{U}, y) \in \Xi^{sol}_{\Omega}$.

Тут через $\tilde{y}_\varepsilon$, $\tilde{y}$ та $\tilde{y}_k$ позначено тривіальні поширення на $\mathbb{R}^n$ функцій, які означені на Ω_ε, Ω та Ω_{ε_k} відповідно. Отже, $\tilde{y}_\varepsilon = \tilde{y}_\varepsilon \chi_{\Omega_\varepsilon}$, $\tilde{y} = \tilde{y}\chi_\Omega$ та $\tilde{y}_k = \tilde{y}_k \chi_{\Omega_{\varepsilon_k}}$.

Теорема 1. *Нехай* Ω, $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *— відкриті підмножини множини* D. *Нехай також* $\Xi^{sol}_{\Omega_\varepsilon} \subset L^{n\times n}_\infty(D) \times \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega_\varepsilon)$ і $\Xi^{sol}_{\Omega} \subset L^{n\times n}_\infty(D) \times \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$ *є множинами допустимих розв'язків задач оптимального керування* (6)—(8) та (1)—(3), *відповідно. Припустимо, що виконується принаймні одна з таких умов:*

1. $\Omega \in \mathcal{W}_w(D)$ і $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ є H^c*-допустимим збуренням області* Ω;

2. Ω *є* p*-стійкою областю* (*див. означення в* [3]) *і* $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *є t-допустимим збуренням* Ω.

Тоді послідовність $\left\{ \Xi_{\Omega_\varepsilon}^{sol} \right\}_{\varepsilon>0}$ *збігається до* Ξ_{Ω}^{sol} *в сенсі Моско.*

Доведення теореми 1 для умови 1 можна легко отримати, використовуючи схему доведення теорем 1, 2, 3 з роботи [4]. Доведення цього результату для умови 2 повністю аналогічне доведенню теореми 1 з [3].

Означення **6.** Будемо казати, що задача оптимального керування (1)–(3) на множині Ω є Моско-стійкою в $L_\infty^{n\times n}(D)\times \overset{\circ}{W}{}_p^1(D)$ відносно деякого збурення $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ області Ω, якщо виконуються такі умови:

1. Множина допустимих пар Ξ_{Ω}^{sol} для (1)–(3) є границею в сенсі Моско-послі-довності множин допустимих пар $\left\{ \Xi_{\Omega_\varepsilon}^{sol} \right\}_{\varepsilon>0}$ для збурених задач (6)–(8);

2. Якщо $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — числова послідовність, яка прямує до 0, а послідовність $\{(\mathcal{U}_k, y_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ є такою, що $(\mathcal{U}_k,\ y_k)\in \Xi_{\Omega_{\varepsilon_k}}^{sol}$ $\forall k\in\mathbb{N}$, і

$$(\mathcal{U}_k,\tilde{y}_k)\overset{\tau}{\to}(\mathcal{U},y) \text{ в } L_\infty^{n\times n}(D)\times \overset{\circ}{W}{}_p^1(D), \text{ де } \left(\mathcal{U},y|_\Omega\right)\in \Xi_\Omega^{sol},$$

то $\varliminf_{k\to\infty} L_{\Omega_{\varepsilon_k}}(\mathcal{U}_k,y_k)\ge L_\Omega\left(\mathcal{U},y|_\Omega\right)$;

3. Для кожної пари $(\mathcal{U},y)\in \Xi_\Omega^{sol}$, існує послідовність $\left\{(\mathcal{U}_\varepsilon,y_\varepsilon)\in \Xi_{\Omega_\varepsilon}^{sol}\right\}_{\varepsilon>0}$ така, що $\mathcal{U}_\varepsilon\to\mathcal{U}$ сильно в $L_\infty^{n\times n}(D)$, $\tilde{y}_\varepsilon\to\tilde{y}$ сильно в $\overset{\circ}{W}{}_p^1(D)$, і

$$\varlimsup_{\varepsilon\to 0} L_{\Omega_\varepsilon}(\mathcal{U}_\varepsilon,y_\varepsilon)\le L_\Omega(\mathcal{U},y).$$

Наступна теорема дає достатні умови Моско-стійкості задач оптимального керування виду (1)—(3).

Теорема 2. *Нехай* Ω *— відкрита підмножина множини* D. *Припустимо, що розподілення* $z_\partial\in L_p(D)$ *в функціоналі вартості (1) є таким, що* $z_\partial(x)=z_\partial(x)\chi_\Omega(x)$ *для м. в.* $x\in D$, *і нехай виконується принаймні одна з умов*:

1. $\Omega\in\mathcal{W}_w(D)$ і $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ є H^c*-допустимим збуренням області* Ω;
2. Ω є p-стійкою, а $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ є t*-допустимим збуренням* Ω.

Тоді задача оптимального керування (1)—(3) *є Моско-стійкою в просторі* $L_\infty^{n\times n}(D)\times \overset{\circ}{W}{}_p^1(D)$.

Доведення легко відтворити, використовуючи схему доведення теореми 5 з [4] і теореми 2 з [3].

Висновки

В роботі наведено достатні умови Моско-стійкості одного класу задач оптимального керування в коефіцієнтах нелінійних еліптичних рівнянь з умовами Діріхле на межі області відносно двох незалежних типів збурень області.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Dal Maso Gianni. Asymproric behaviour and correctors for Dirichlet problem in perforated domains with homogeneous monotone operators / G. Dal Maso,F. Murat // Ann. Scoula Norm. Sup. Pisa Cl.Sci. — 1997. — №. 4, Vol. 24. — P. 239—290.

2. Bucur Dorin. Variational Methodth in Shape Optimization Problems / D. Bucur, G. Buttazzo. — Birkhäuser, Boston: in Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 2005. — Vol. 65

3. Капустян В. О. Достатні умови стійкості відносно збурень області одного класу задач оптимального керування / В. О. Капустян, О. П. Когут // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2008. — № 6. — С. 138—143.

4. Kogut Olga. On stability of one class of optimal control problems to the domain perturbations / Olga Kogut // Вісник ДНУ. Серія: Проблеми математичного моделювання та теорії диференціальних рівнянь. — ДНУ, 2009. — Вип. 1. — № 8. — С. 23—41.

5. Капустян В. О. Соленоидальные управления в коэффициентах нелинейных еллиптических краевых задач / В. О. Капустян, О. П. Когут // Компьютерная математика. — 2010. — № 1. — С. 138—143.

6. Bucur Dorin. N -Dimensional Shape Optimization under Capacitary Constraints / D. Bucur, J. P. Zolésio // J. Differential Equations. — 1995. — Vol. 123. — № 2. — P. 504—522.

7. Dancer E. N. The effect of domains shape on the number of positive solutions of certain nonlinear equations / E. N. Dancer // J. Diff. Equations. — 1990. — Vol. 87. — P. 316—339.

8. Dal Maso Gianni. A stability result for nonlinear Neumann problems under boundary variations / G. Dal Maso, F. Ebobisse, M. Ponsiglione // J. Math. Pures Appl. — 2003. — Vol. 82. — P. 503—532.

9. Bucur Dorin. Shape optimization problem governed by nonlinear state equations / D. Bucur, P. Trebeschi // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. — 1998. — Ser. A. — Vol. 128. — P. 943—963.

Рекомендована кафедрою комп’терних систем управління

Надійшла до редакції 16.02.10
Рекомендована до друку 20.02.10

Капустян Володимир Омелянович — завідувач кафедри, ***Когут Ольга Петрівна*** — асистент.

Кафедра математичного моделювання економічних систем НТУУ, Київський політехнічний інститут